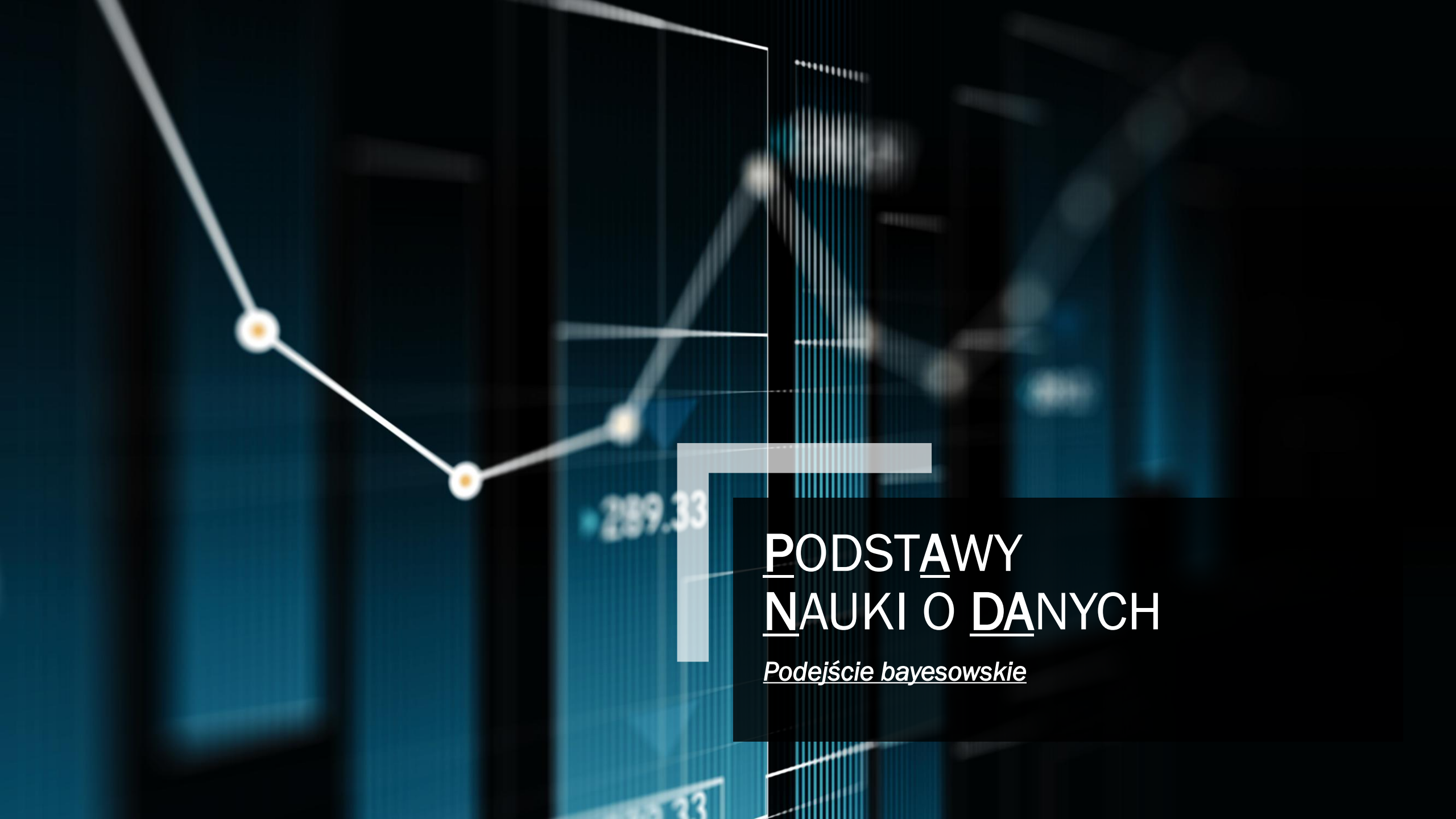




PODSTAWY NAUKI O DANYCH

Podejście bayesowskie

Przypominajka statystyczna

■ Wzór Bayesa

$$p(\theta|X) \cdot p(X) = p(X, \theta) = p(X|\theta) \cdot p(\theta)$$

$$p(\theta|X) = \frac{p(X|\theta) \cdot p(\theta)}{p(X)}$$

Jeżeli ktoś żywi oczekiwania zależne od zajścia danego zdarzenia, to prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia [w stosunku] do prawdopodobieństwa porażki ma się jak strata poniesiona przez tę osobę w przypadku porażki [w stosunku] do jej zysku w razie zajścia zdarzenia.

$$p(Model|DANE) = \frac{p(DANE|Model) \cdot p(Model)}{p(DANE)}$$

Kiedy stosować metodę Bayesa

- Czy moneta jest uczciwa?

θ – prawdopodobieństwo wyrzucenia Orła

$$\theta_{\text{Naiwny}} = \frac{\# \text{Orły}}{\# \text{Orły} + \# \text{Reszki}}$$

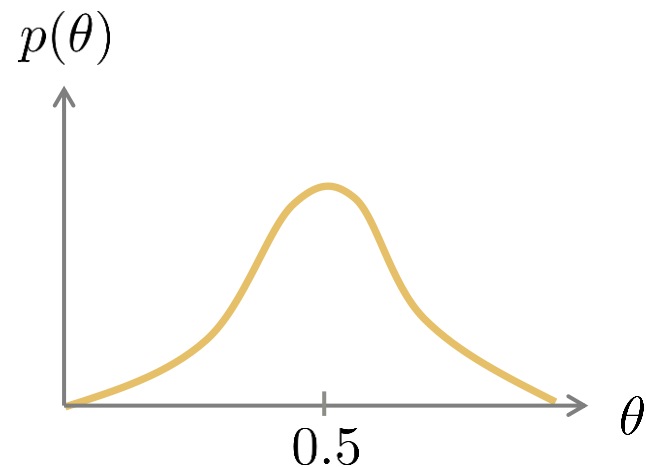
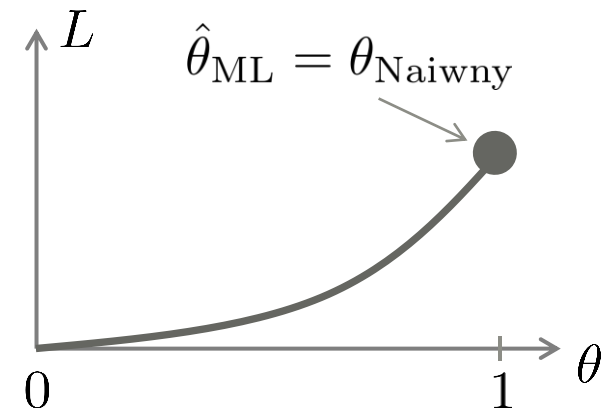


- 3 rzuty $X = [O \ O \ O] \Rightarrow \theta_{\text{Naiwny}} = 1$
- MMW: Jakie jest prawdopodobieństwo, że z monety o konkretnej wartości θ uzyskamy pomiary X ?

$$L(\theta) = P(X|\theta) = \theta^{\# \text{Orły}} (1 - \theta)^{\# \text{Reszki}}$$

Kiedy stosować metodę Bayesa

- Dlaczego ten wynik wydaje się podejrzany?
- Nadmierne dopasowanie do danych (ang. *overfitting*)
- Jak uwzględnić wiedzę o rzeczywistych monetach?
- Przekonanie (ang. *belief*)



Jak stosować metodę Bayesa

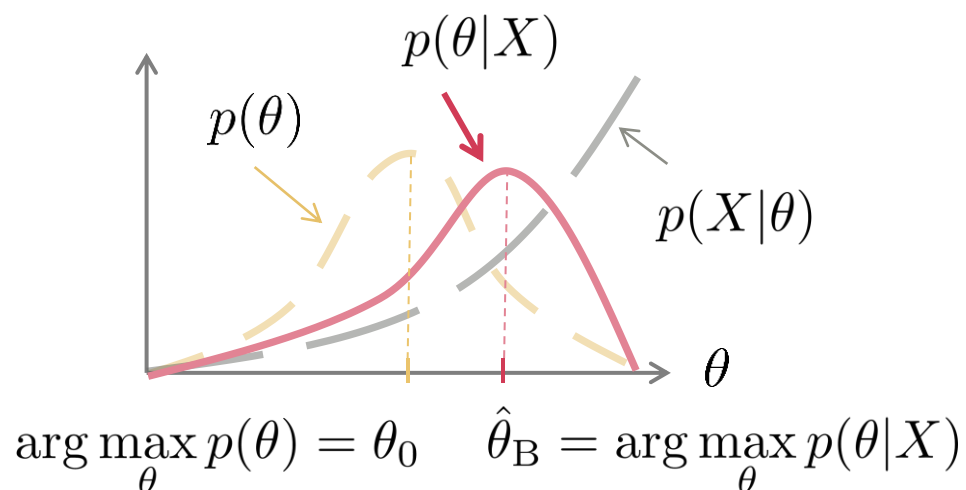
rozkład końcowy $\longrightarrow$ rozkład wstępny

rozkład a'posteriori (ang. *posterior*)

rozkład a'priori (ang. *prior*)

$$p(\theta|X) = \frac{p(X|\theta)p(\theta)}{p(X)}$$

$$p(X) = \int_{D_\theta} p(X, \theta) d\theta = \int_{D_\theta} p(X|\theta)p(\theta) d\theta$$



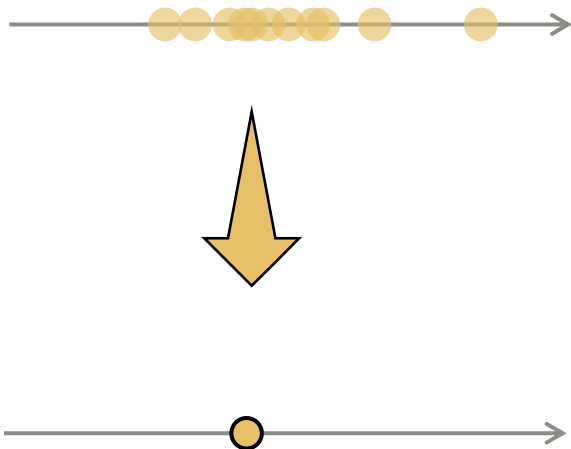
$\hat{\theta}_0$ $\longleftarrow$ $p(\theta)$

Nowe dane
 X

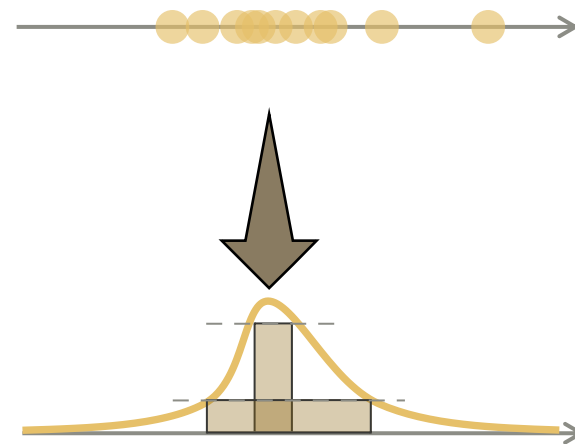
$\hat{\theta}_B$ $\longleftarrow$ $p(\theta|X)$

Wzór
Bayesa

Estymacja punktowa



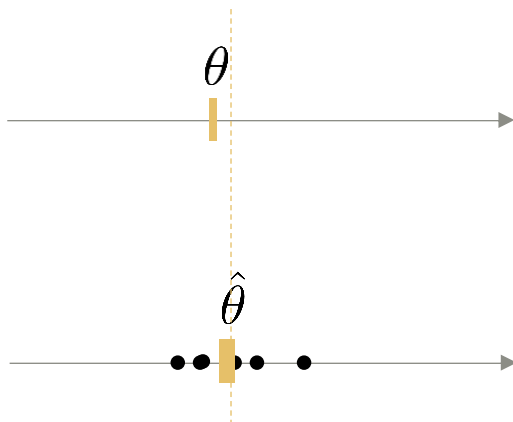
Estymacja przedziałowa



Jak myśleć o estymacji ?

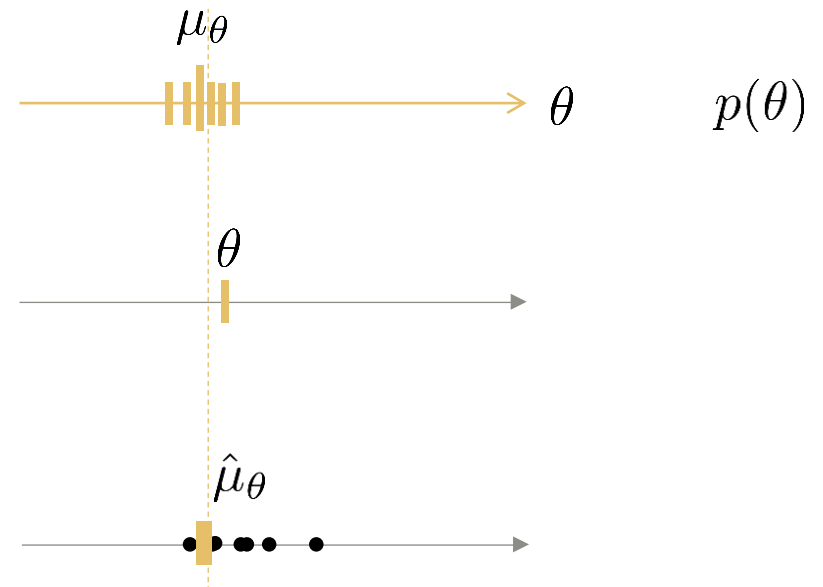
- Podejście częstościowe
(ang. *frequentist approach*)

estymuję nieznaną, ale ustaloną wartość



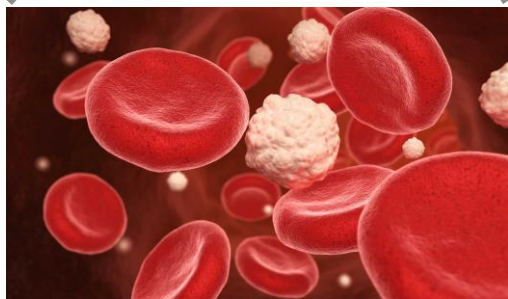
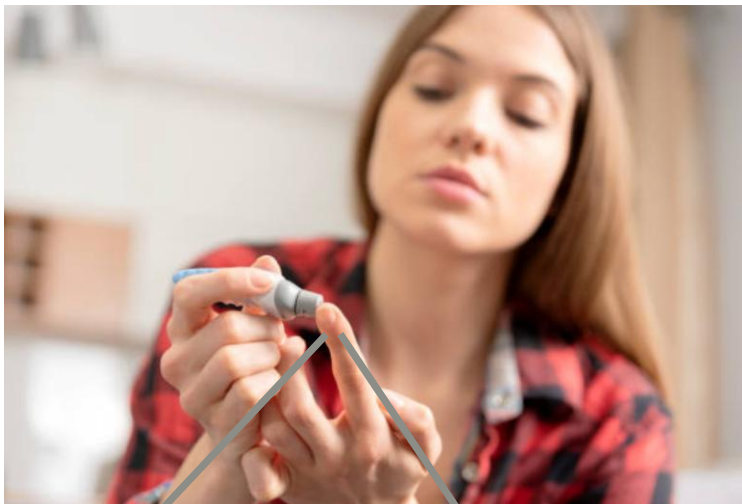
- Podejście bayesowskie
(ang. *bayesian approach*)

estymuję wartość wylosowaną z pewnego worka

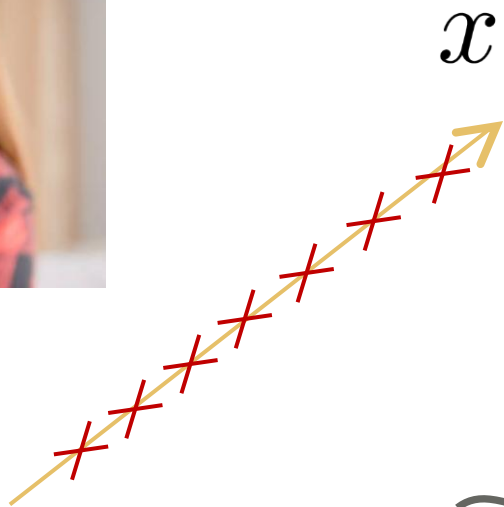


ESTYMACJA MIERZONEJ WIELKOŚCI





θ

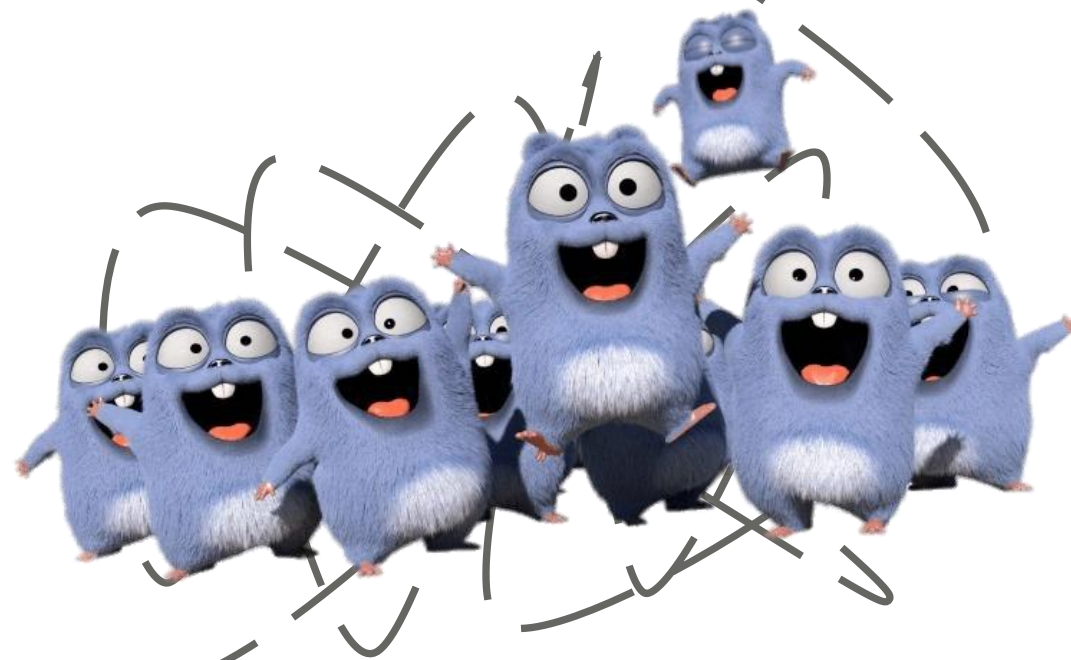


x



$$\hat{\theta} = \Psi(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N]$$



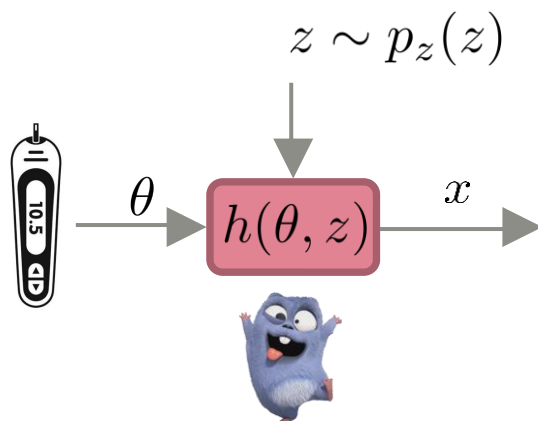
ESTYMACJA MIERZONEJ WIELKOŚCI

Metoda Bayesa

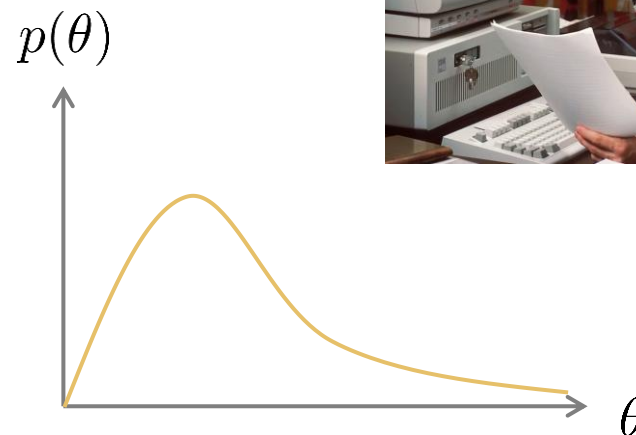


Estymacja mierzonej wielkości

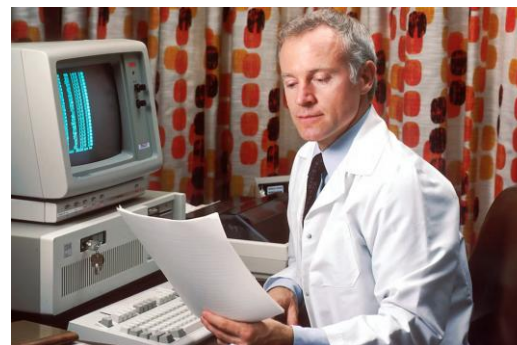
W czym problem?



Dane pomiarowe

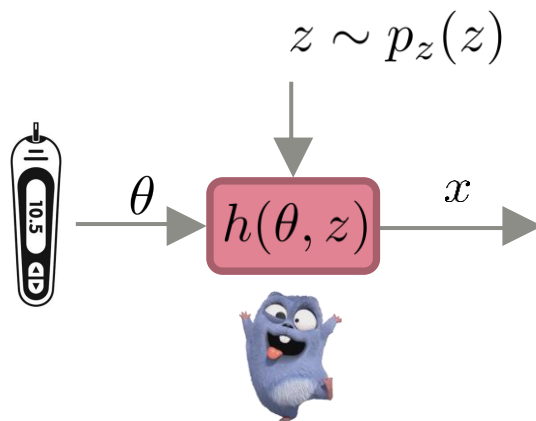


Wiedza

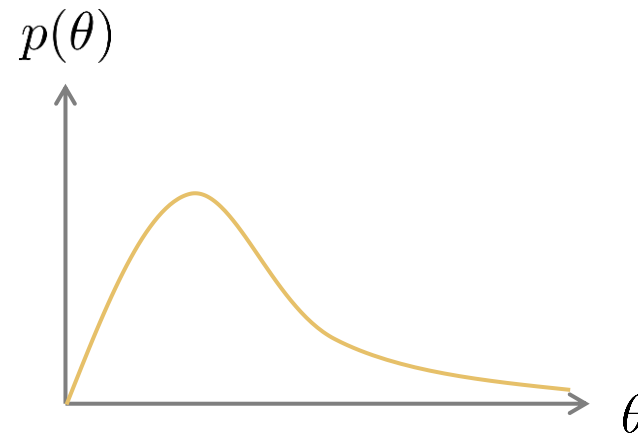


Estymacja mierzonej wielkości

Rozwiązanie



Dane pomiarowe



Wiedza

$$p(\theta | \text{Dane}) = \frac{p(\text{Dane} | \theta) \cdot p(\theta)}{\cancel{p(\text{Dane})}}$$

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta} p(\mathbf{X} | \theta) p(\theta)$$

Przykład zadania

- Zakłócenia dodają się do mierzonej wielkości i mają rozkład normalny o znanych parametrach

$$\text{Dane} = \left\{ \mathbf{x}_i \right\}_{i=1}^N$$
$$x = \theta + z \quad p_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - \mu_z}{\sigma_z} \right)^2 \right] \quad \mu_z, \sigma_z = \text{const.}$$

- Dodatkowo wiemy, że estymowana wielkość ma rozkład normalny:

$$p_\theta(\theta) = \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\theta - \mu_\theta}{\sigma_\theta} \right)^2 \right] \quad \mu_\theta, \sigma_\theta = \text{const.}$$

- Należy wyznaczyć estymator MAP mierzonej wielkości

Przykład zadania

- Pokaż, że estymator MAP jest średnią ważoną estymatora ML i wiedzy apriorycznej wyrażonej przez wartość oczekiwaną μ_θ .
- Jaki wzór opisuje współczynniki wagowe? Od jakich wielkości zależą wagi?
- Rozpatrz dwie skrajne sytuacje:
 - *pomiarów jest mało i są niskiej jakości (ang. unreliable data)*
 - *dostępnych jest dużo wysokiej jakości pomiarów, lecz niewiele wiemy o możliwych wartościach θ (ang. unreliable prior)*
- Jak w obu powyższych sytuacjach upraszcza się estymator MAP ?

Przykład zadania

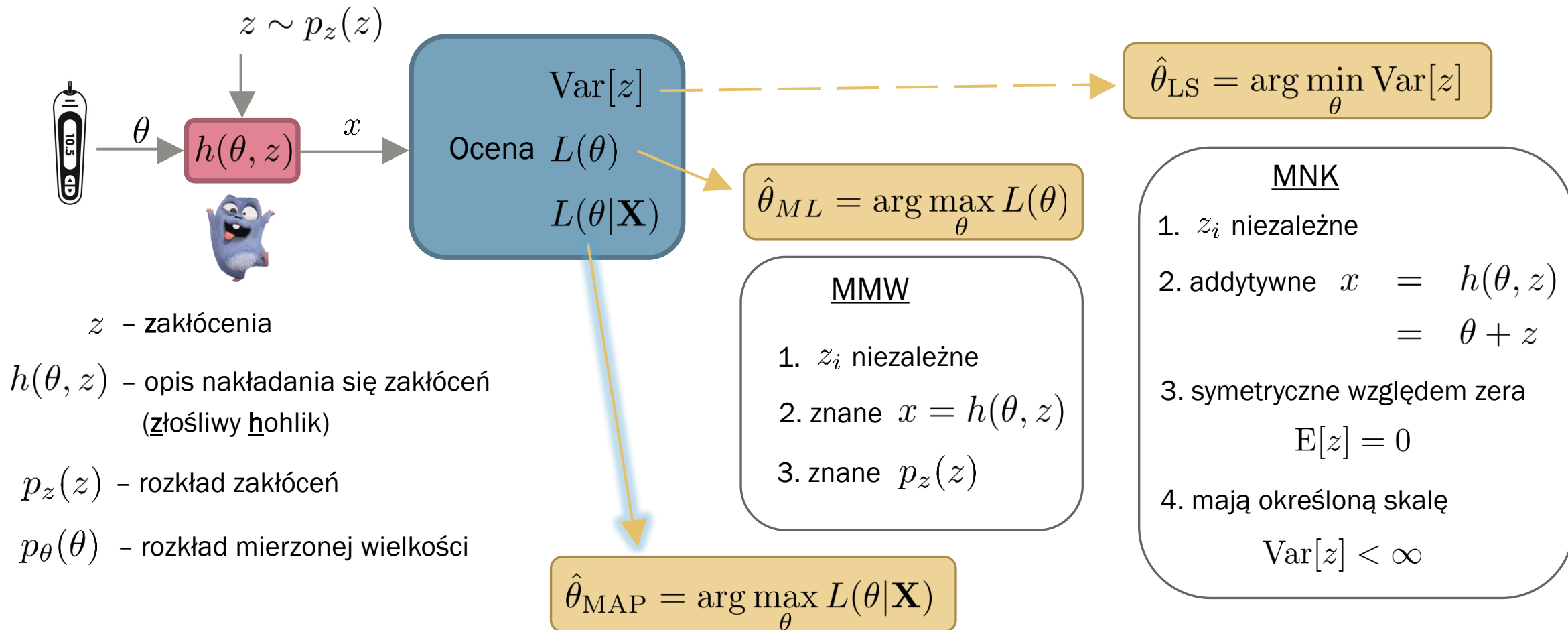
- Sprowadzimy wiedzę aprioryczną do przekonania, że wartość θ nie powinna zbyt odchodzić od μ_θ .
- Opracuj wzór na estymator θ_K , który maksymalizuje funkcję wiarygodności z nałożoną karą za odchylenie oszacowania wartości θ od μ_θ :

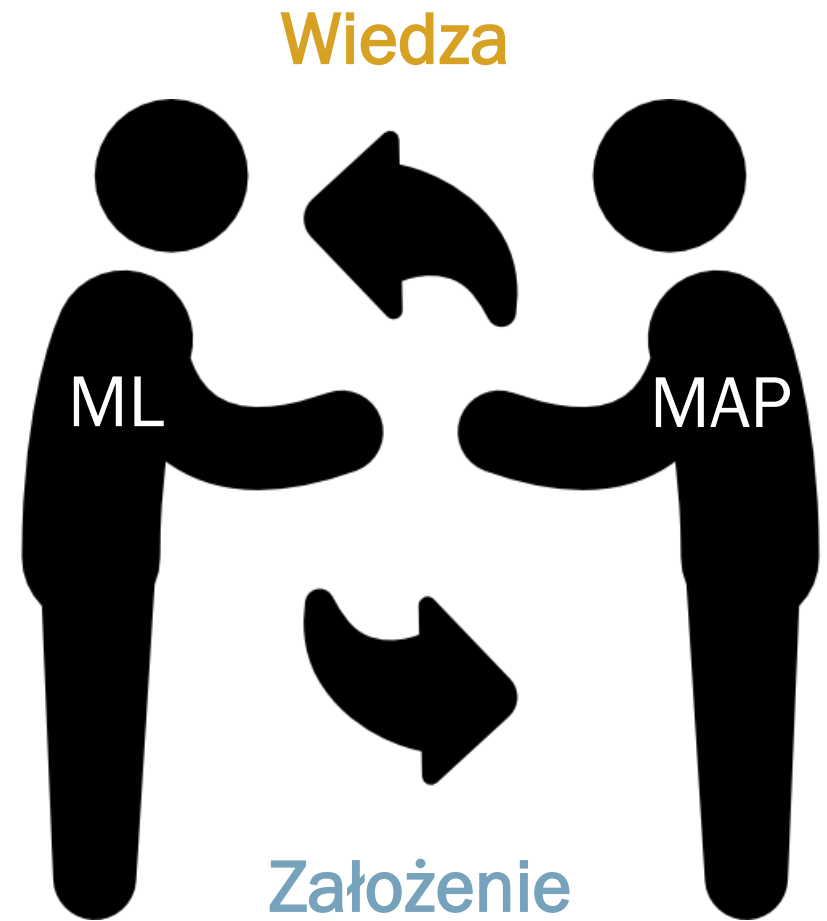
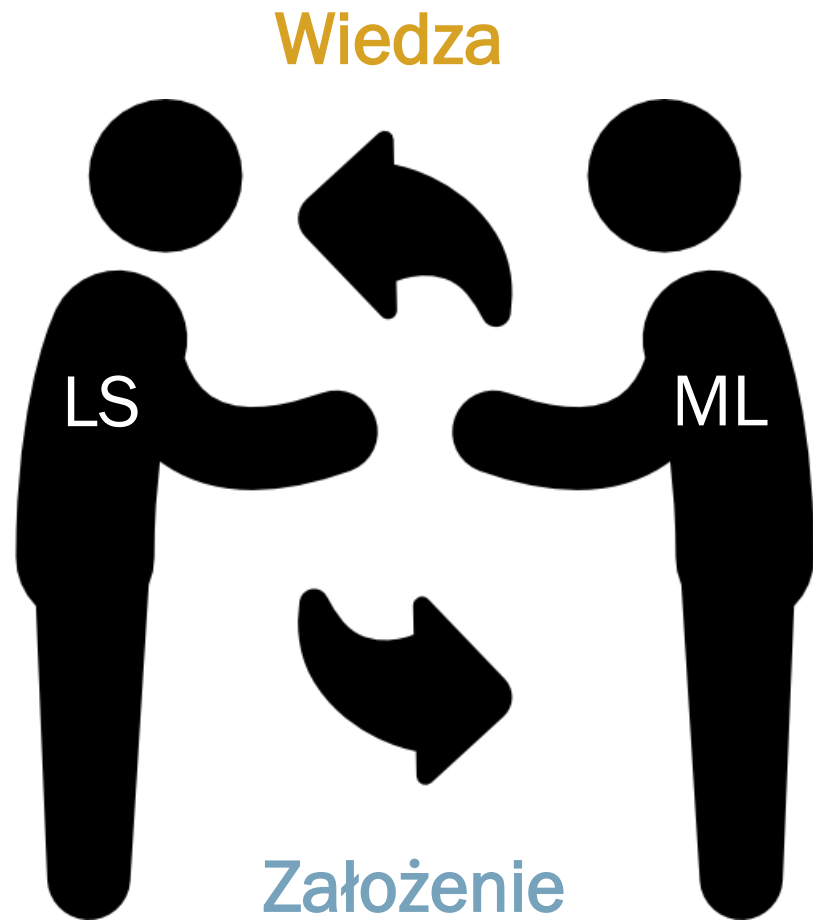
$$\theta_K = \arg \max_{\theta} \left\{ \ln p(\mathbf{X}|\theta) - \lambda(\theta - \mu_\theta)^2 \right\}, \quad \lambda > 0$$

- Zbadaj podobieństwo estymatorów θ_K i θ_{MAP} .
- Co metoda Bayesa ma wspólnego z regularyzacją?

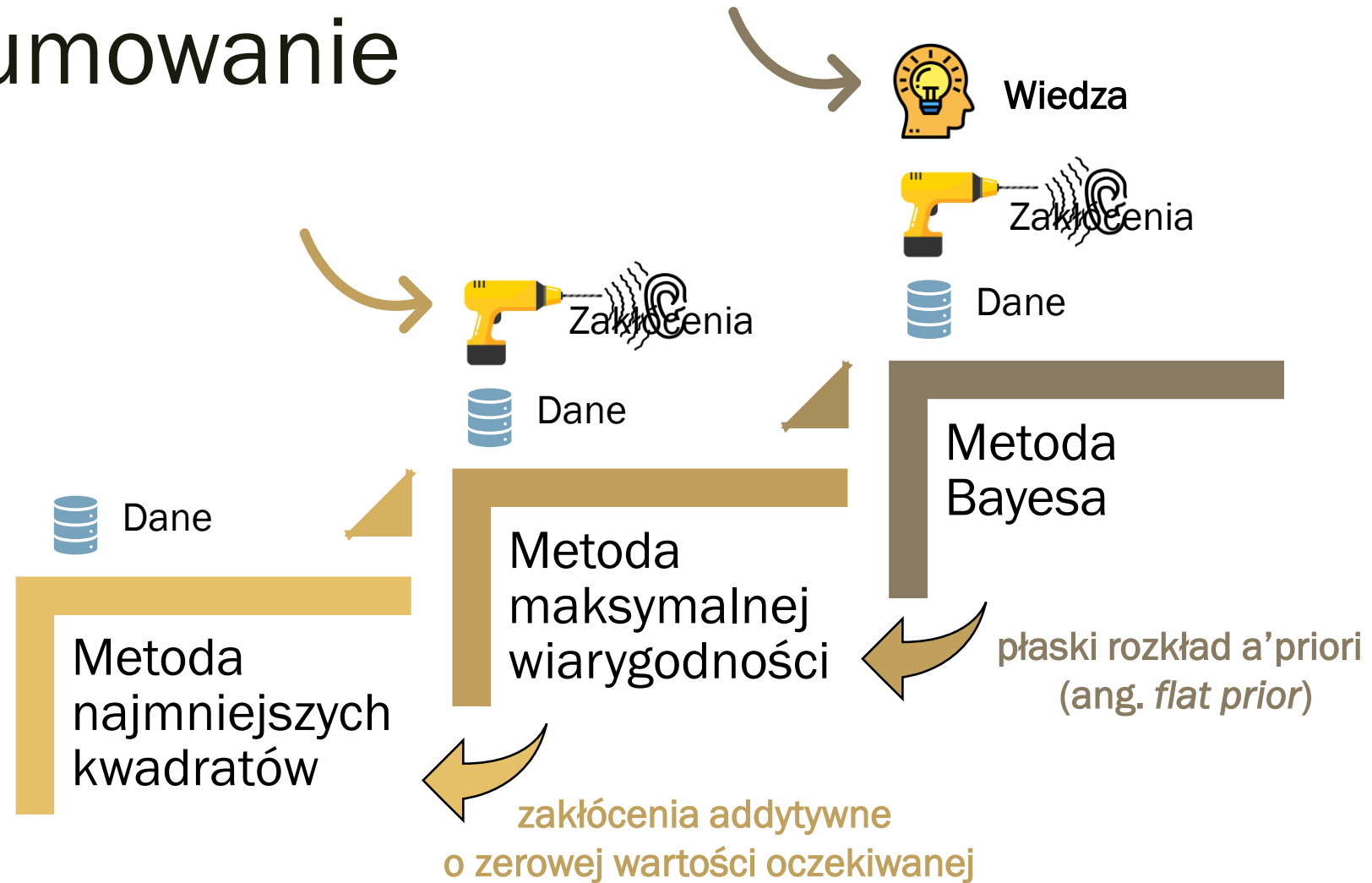
Estymacja mierzonej wielkości

Założenia stojące u podstaw metod





Podsumowanie



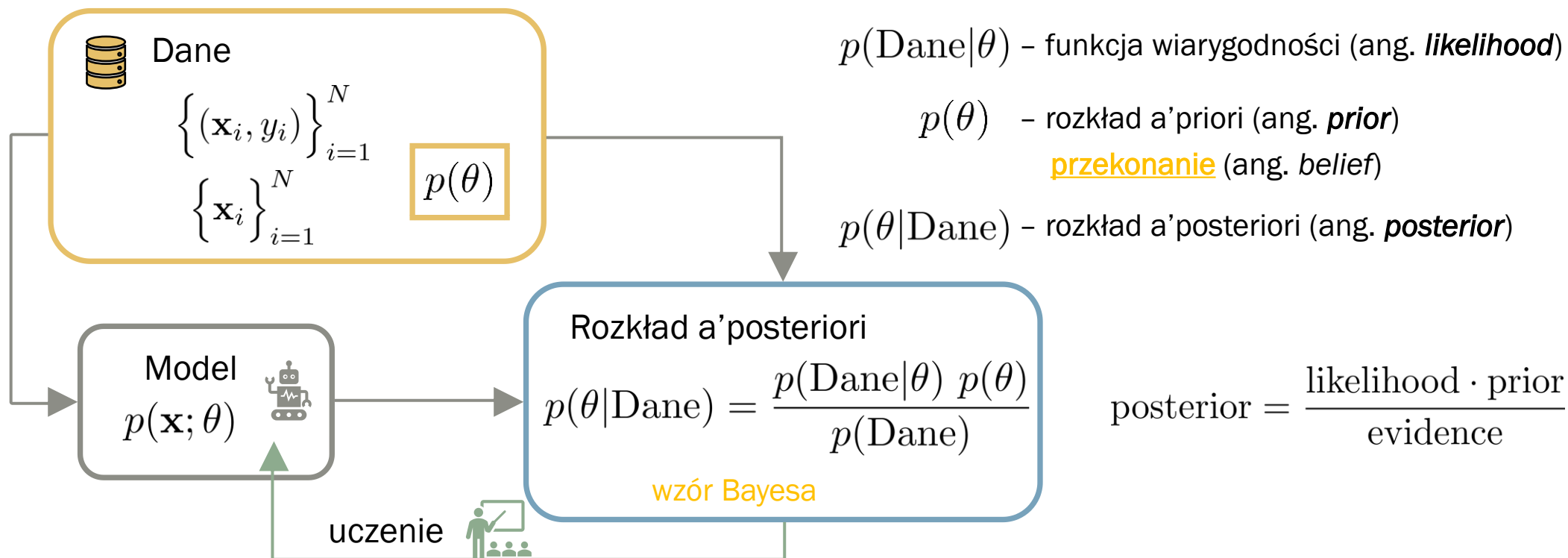
ESTYMACJA PARAMETRU MODELU

Metoda Bayesa



Dopasowanie modelu do danych

Metoda Bayesa (ang. *Bayesian method*)



$$\hat{\theta}_{\text{prior}} = \arg \max_{\theta} p(\theta)$$

$$\hat{\theta}_{\text{B}} = \arg \max_{\theta} p(\theta|\text{Dane})$$

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta} p(\text{Dane}|\theta)p(\theta)$$

Podejście bayesowskie

- Podejście bayesowskie (ang. *bayesian framework*)



$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \arg \max_{\theta} p(X|\theta)$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{\text{B}} &= \arg \max_{\theta} p(\theta|X) \\ &= \arg \max_{\theta} \frac{p(X|\theta)p(\theta)}{p(X)}\end{aligned}$$

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta} p(X|\theta)p(\theta)$$

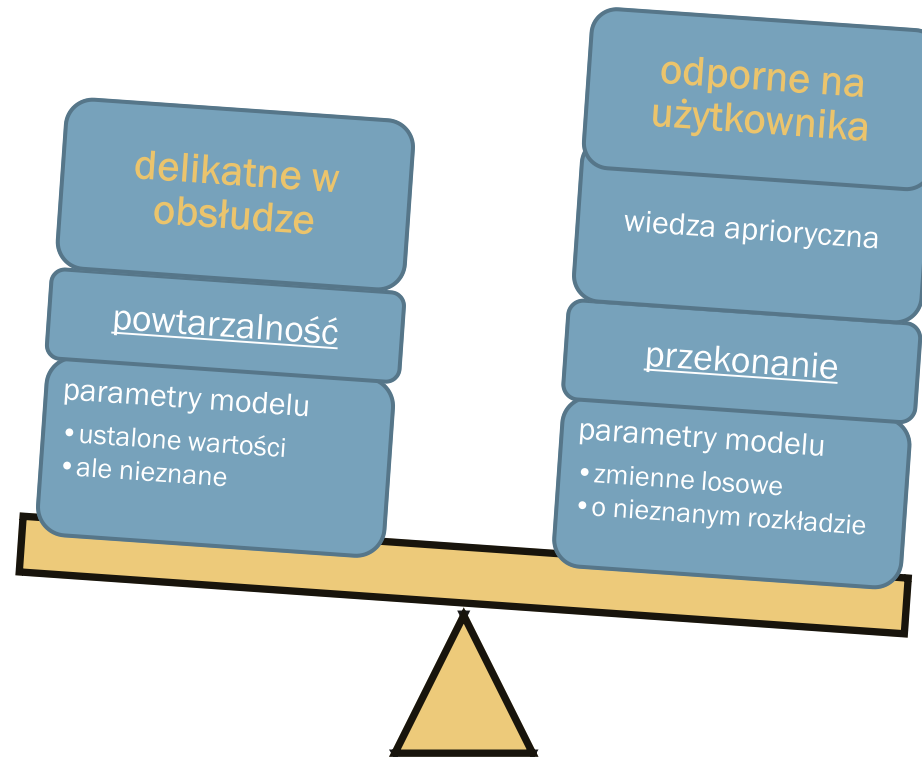
Estymacja parametrów modelu

podejście częstościowe
(ang. *frequentist approach*)

podejście bayesowskie
(ang. *bayesian approach*)

$$p(\text{Dane} | \text{Model})$$

losowe / ustalony



$$p(\text{Model} | \text{Dane})$$

losowy / ustalony



THE END