

Sieci złożone

WIELKOŚCI CHARAKTERYZUJĄCE GRAFY (I SIECI)

Czym jest graf / sieć

Zbiór węzłów (ang. *nodes*)

$$\mathcal{W} = \{w_i\}_{i=1}^N$$

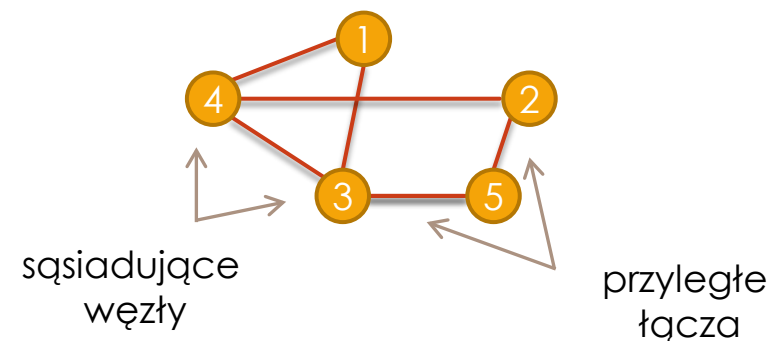
Zbiór łączy (ang. *links*)

$$\mathcal{L} = \left\{ \{w_i, w_j\} \text{ takich, że } w_i \text{ jest połączone z } w_j \right\}$$

Sieć $(\mathcal{W}, \mathcal{L})$

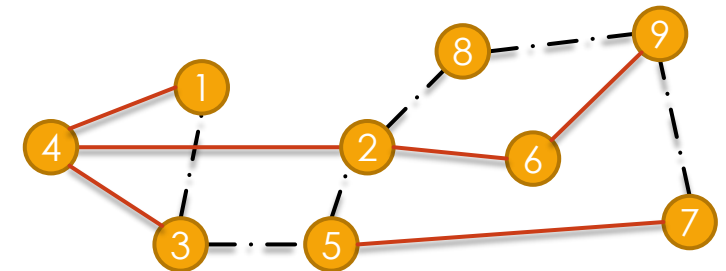
$$\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \{w_1, w_3\}, \{w_1, w_4\}, \{w_2, w_4\}, \{w_2, w_5\}, \{w_3, w_4\}, \{w_3, w_5\} \right\}$$



Poruszanie się po grafie / sieci

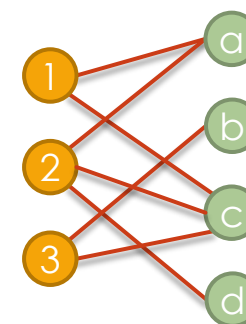
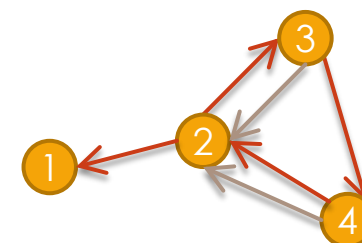
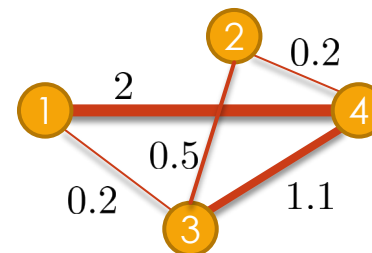
- ▶ **Droga** – ciąg kolejnych sąsiadujących węzłów (bez cykli)
- ▶ **Szlak** – droga bez powtórzeń łęczy
- ▶ **Ścieżka** – droga bez powtórzeń węzłów
- ▶ **Cykl** – droga o tym samym początku i końcu



- ▶ Węzeł w_i jest **osiągalny** z w_j jeżeli istnieje między nimi ścieżka
- ▶ Odległość (dla najkrótszej drogi) $d(w_i, w_j)$
- ▶ Najkrótsza ścieżka $\left\{ \{w_1, w_3\}, \{w_3, w_5\}, \{w_5, w_2\}, \{w_2, w_8\}, \{w_8, w_9\}, \{w_9, w_7\} \right\}$
 - ▶ algorytm Dijkstry
 - ▶ może ich być wiele

Rodzaje grafów

- ▶ Graf **prosty** (nieskierowany) 
- ▶ Graf **skierowany** (digraf) 
- ▶ **Multigraf**: łączy wielokrotne i pętle
- ▶ Graf **ważony**: bliskość lub odległość między w_i, w_j
- ▶ Graf **planarny**: można narysować na kartce bez przecięć
- ▶ Graf **dwudzielny**
 - ▶ połączone są tylko węzły należące do dwóch różnych podzbiorów
- ▶ Graf **spójny**: każdy węzeł jest osiągalny z dowolnego innego
- ▶ Graf **pełny**: każda para węzłów jest połączona
- ▶ Graf **losowy**: połączenia są generowane losowo



Wielkości charakteryzujące graf

▶ Rozmiar

w grafie pełnym $|\mathcal{L}| = \frac{N(N-1)}{2}$

- ▶ liczba połączeń

▶ Rząd / stopień (ang .degree)

$$k = k^{\text{in}} + k^{\text{out}}$$

- ▶ liczba połączeń wchodzących + wychodzących

▶ Gęstość = rozmiar / liczba możliwych krawędzi

- ▶ stopień wypełnienia grafu krawędziami

▶ Średnica = długość najdłuższej z najkrótszych ścieżek

- ▶ najgorsze skomunikowanie

▶ Średnia długość ścieżki (z najkrótszych ścieżek dla wszystkich par w_i, w_j)

- ▶ gdy mała wartość to graf jest zwarty – łatwo przepływają towary i informacje

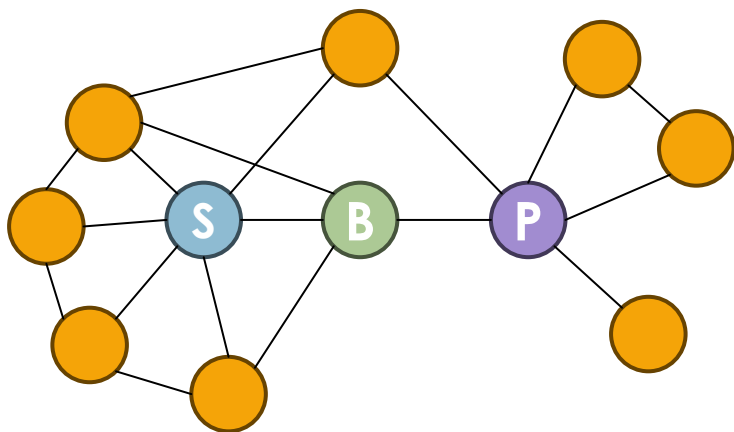
$$k^{\text{out}} = 0 \quad k^{\text{in}} = 0$$

ujście (ang. sink) źródło (ang. source)

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{2|\mathcal{L}|}{N}$$

$$\text{gęstość} = \frac{2|\mathcal{L}|}{N(N-1)}$$

Miary centralności



Stopień wężła = liczba połączonych z nim bezpośrednio innych wierzchołków

Bliskość = odwrotność średniej odległości od innych węzłów

Pośrednictwo (*betweenness*) = liczba / odsetek najkrótszych ścieżek przechodzących przez węzeł

S – najważniejszy według stopnia wężła (*degree*)

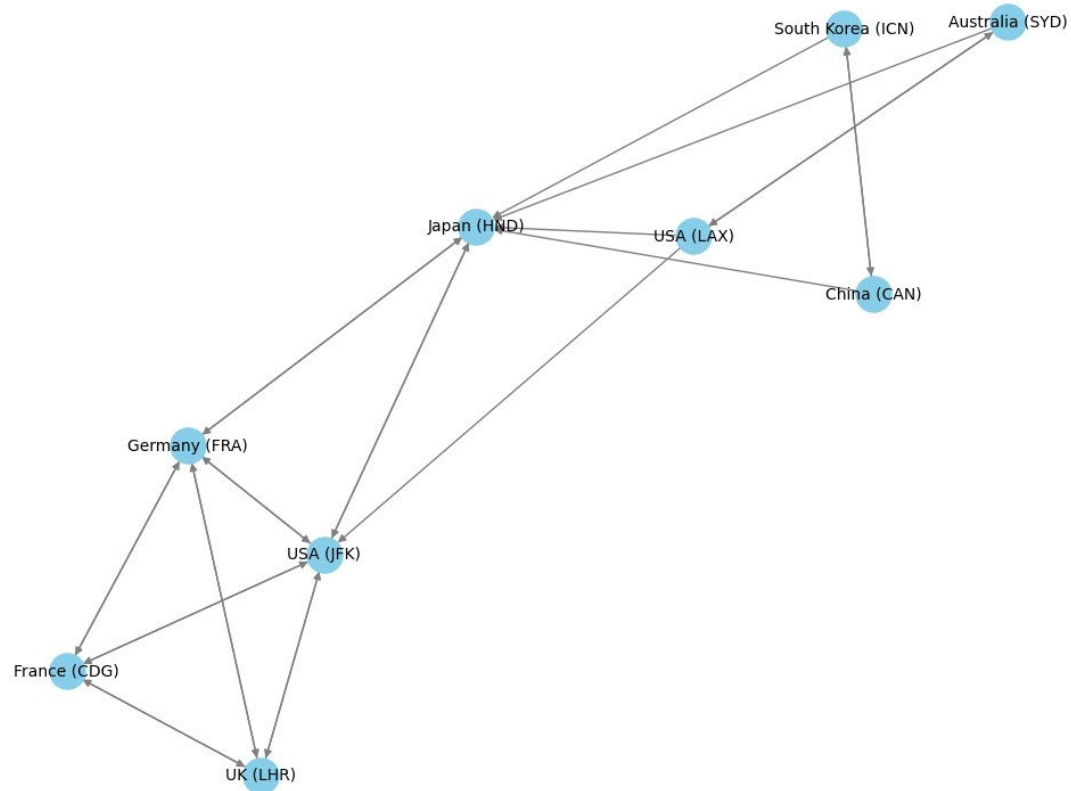
B – najważniejszy według bliskości (*closeness*)

P – najważniejszy według pośrednictwa (*betweenness*)

Centralność wektora własnego
(ang. **eigenvector centrality**) i
PageRank

Przykład

Flight Connections



Sorted Degree Centrality:

USA (JFK): 1.125
Germany (FRA): 1.0
Japan (HND): 1.0
UK (LHR): 0.75
France (CDG): 0.75
USA (LAX): 0.5
Australia (SYD): 0.375
China (CAN): 0.375
South Korea (ICN): 0.375

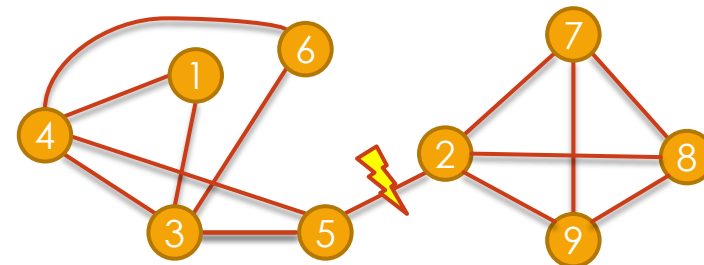
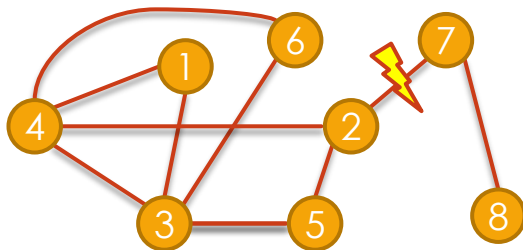
Sorted Betweenness Centrality:

Japan (HND): 0.20238095238095236
USA (JFK): 0.13988095238095236
Germany (FRA): 0.08333333333333331
USA (LAX): 0.02083333333333333
UK (LHR): 0.0
France (CDG): 0.0
Australia (SYD): 0.0
China (CAN): 0.0
South Korea (ICN): 0.0

Opracował: Przemysław Tomala

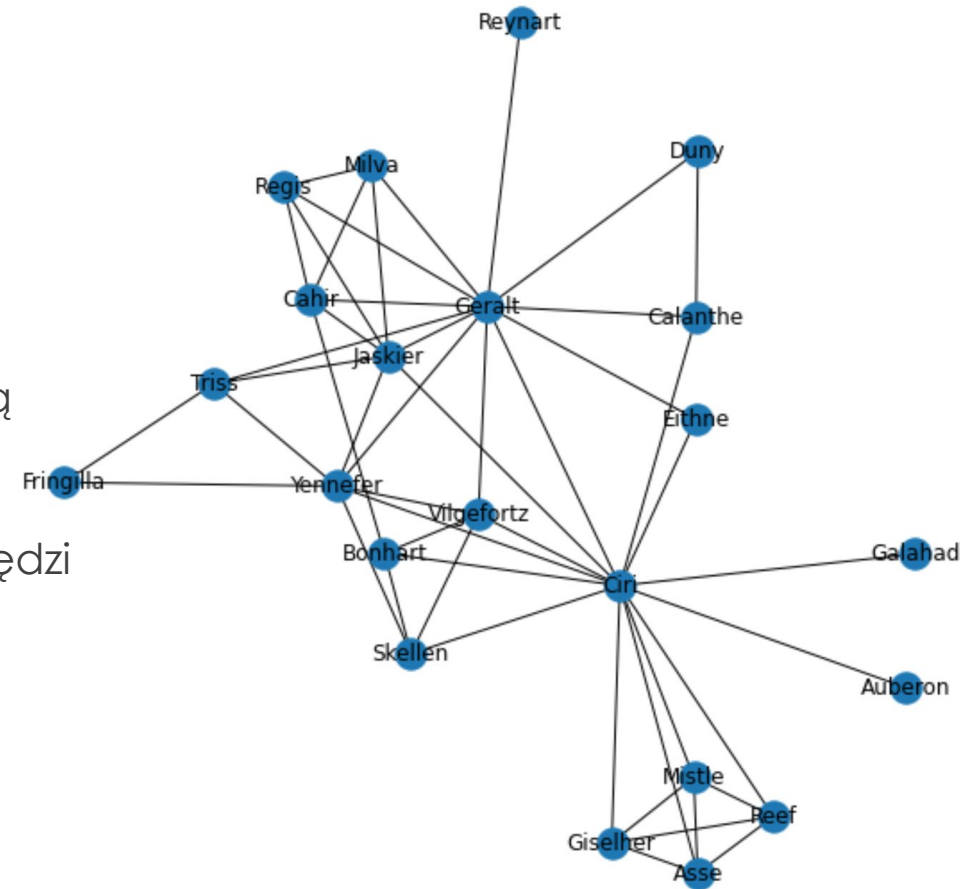
Podgrafy

- ▶ **Składowe spójne** (ang. *connected components*) – największe spójne podgrafy
- ▶ **k-spójność** wierzchołkowa/krawędziowa
 - ▶ usunięcie dowolnych $k - 1$ wierzchołków/krawędzi nie rozspójnia grafu
 - ▶ odporność na uszkodzenia
 - ▶ **przeguby** = wierzchołki, których jednoczesne usunięcie rozspójnia graf
 - ▶ **mosty** = krawędzie, których jednoczesne usunięcie zwiększa liczbę składowych spójnych



Podgrafy

- ▶ **Klika** n -tego rzędu = podgraf pełny o n wierzchołkach
 - ▶ wzajemne monitorowanie, trudno podsłuchać
- ▶ **Klika maksymalna**
 - ▶ nie można dołączyć wierzchołka, aby graf wciąż był kliką
- ▶ **n -podklika** (ang. *near clique*)
 - ▶ podgraf, który staje się kliką po uzupełnieniu go o n krawędzi



Opis matematyczny grafu

- ▶ Lista sąsiedztwa
- ▶ **Macierz sąsiedztwa** (ang. *Adjacency matrix*)
 - ▶ graf prosty: macierz A symetryczna, binarna
 - ▶ graf ważony: $a_{ij} \in \mathbb{R}$
 - ▶ pętle (węzeł połączony sam ze sobą)

$$k_i \stackrel{?}{=} \sum$$

- ▶ **Siła węzła** = stopień węzła w grafie ważonym

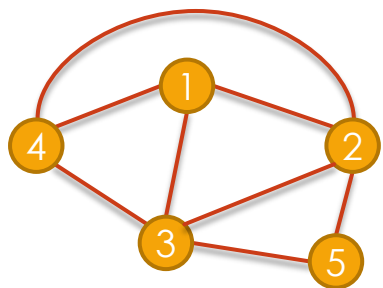
$$A = [a_{ij}]$$

a_{ij} – liczba połączeń
między węzłami w_i, w_j

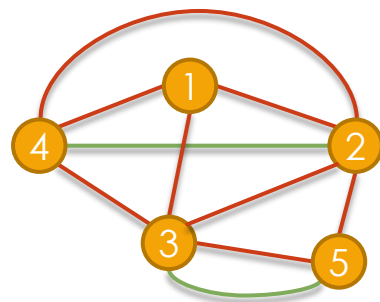
$$k_i^{\text{in}} \stackrel{?}{=} \sum$$

$$|\mathcal{L}| \stackrel{?}{=} \sum$$

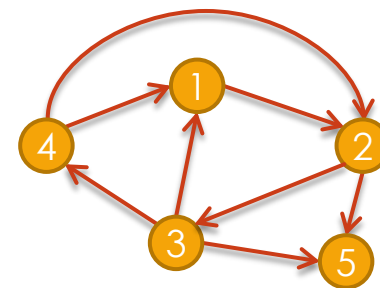
Opis matematyczny grafu



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

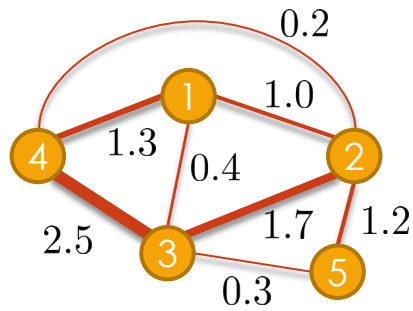


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

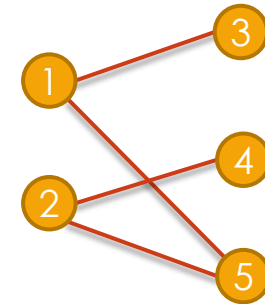


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Opis matematyczny grafu



?



$$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.4 & 1.3 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 1.7 & 0.2 & 1.2 \\ 0.4 & 1.7 & 0.0 & 2.5 & 0.3 \\ 1.3 & 0.2 & 2.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.2 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Opis matematyczny grafu

▶ Liczba ścieżek między węzłami w_i, w_j $|S_{ij}|^{(1)} \stackrel{?}{=}$

$$|S_{ij}|^{(2)} \stackrel{?}{=} \sum A_{..} A_{..} = [A^2]_{ij}$$

$$|S_{ij}|^{(K)} \stackrel{?}{=}$$

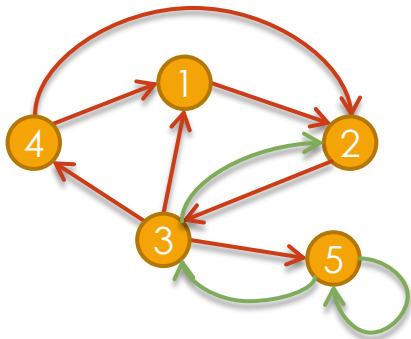
▶ Spójność grafu w macierzy sąsiedztwa

▶ Spójność grafu skierowanego

Opis matematyczny grafu

► **Macierz incydencji** (ang. *Incidence matrix*)

$$M = [m_{ij}]$$



$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } w_i \text{ jest początkiem } e_j, \\ -1 & \text{jeżeli } w_i \text{ jest końcem } e_j \text{ w grafie skierowanym,} \\ 0 & \text{jeżeli nie ma incydencji między } w_i, w_j, \\ 2 & \text{jeżeli } w_i \text{ ma połączenie z samym sobą.} \end{cases}$$

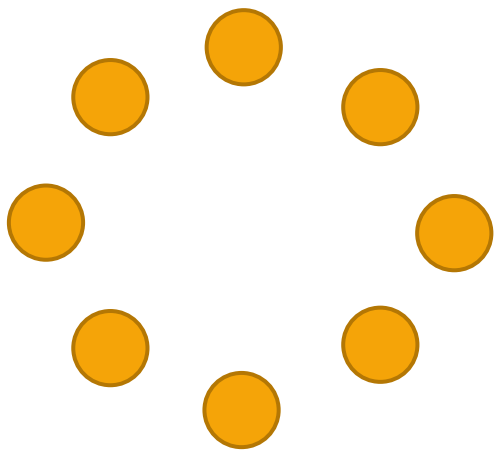
$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

wierzchołki

krawędzie

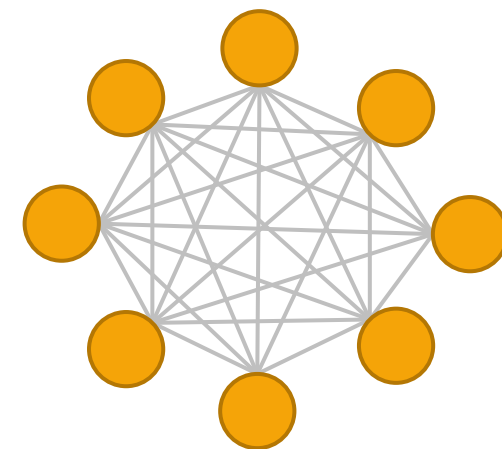
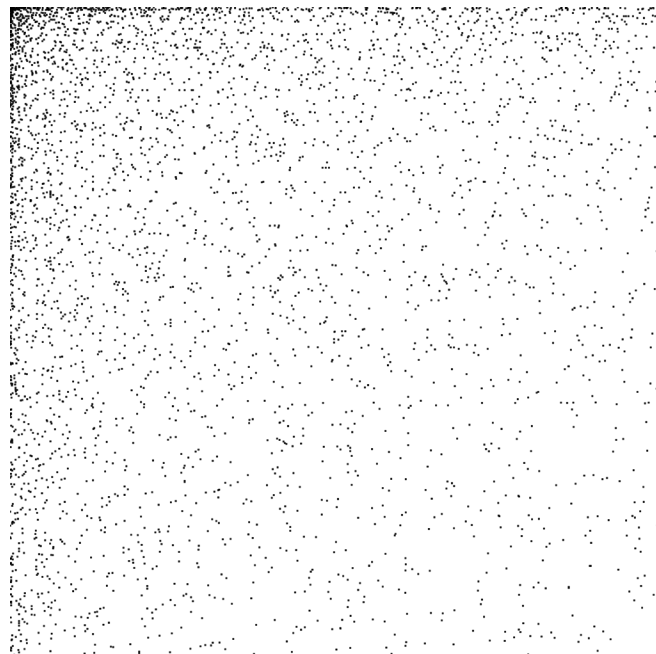
► graf ważony: ?

Rzeczywiste sieci są rzadkie



$$|\mathcal{L}| = \frac{N(N-1)}{2}$$

$$\langle k \rangle = 0$$



$$|\mathcal{L}| = \frac{N(N-1)}{2}$$

$$\langle k \rangle = N - 1$$

Sieć = graf + dynamika = graf agentów

- ▶ stan węzła
- ▶ **rozkład stopni węzłów**

Graf	Sieć
wierzchołek	węzeł
krawędź	połączenie

Koniec