

Sieci złożone

ESTYMACJA ROZKŁADU POTĘGOWEGO

Estymacja parametrów rozkładu potęgowego z danych

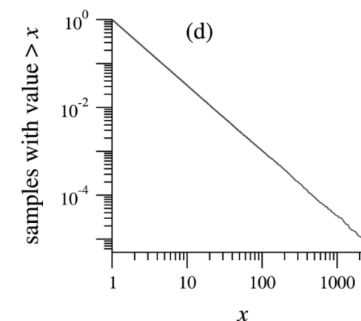
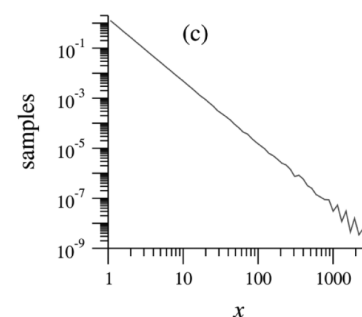
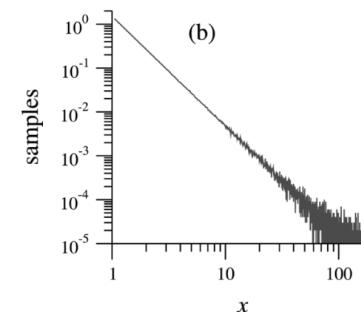
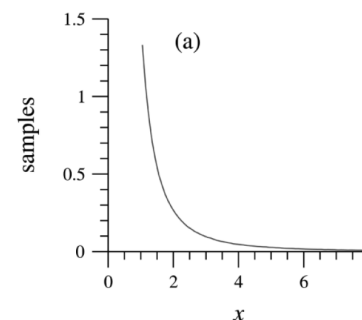
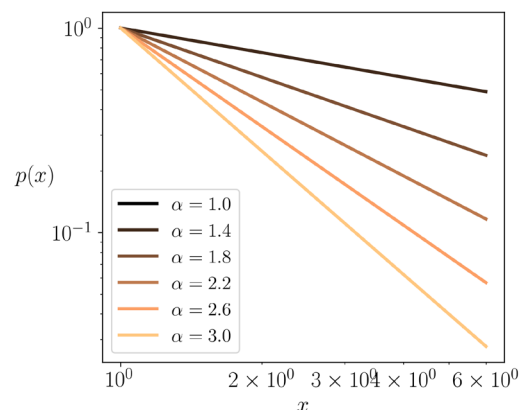
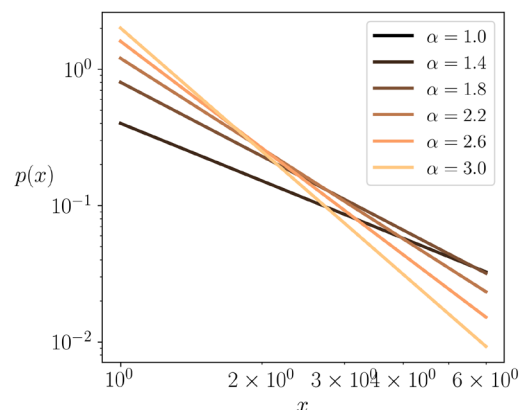
a) rozkład, z którego wygenerowano milion liczb

$$\alpha = 2.5$$

b) histogram przy jednostajnych przedziałach uśredniania

c) histogram przy **binowaniu logarytmicznym**: długość przedziałów rośnie wykładniczo z rozmiarem zdarzeń

d) skumulowany rozkład $\alpha \leftarrow \alpha - 1$



Uwaga: może zająć podobieństwo do rozkładów

- log-normalny
- potęgowy z wykładniczym obcięciem (ang. *exponential cutoff*)

Estymacja parametrów rozkładu potęgowego z danych

► Metoda maksymalnej wiarygodności

$$p(x) = (\alpha - 1)x_{\min}^{\alpha-1}x^{-\alpha}$$

Pomiary: $\{x_i\}_{i=1}^N$ Szukane: $\alpha = ?$

Estymacja parametrów rozkładu potęgowego z danych

► Metoda maksymalnej wiarygodności

$$p(x|\alpha) = \prod_{i=1}^N p(x_i) = \prod_{i=1}^N (\alpha - 1) x_{\min}^{\alpha-1} x_i^{-\alpha}$$

$$p(x) = (\alpha - 1) x_{\min}^{\alpha-1} x^{-\alpha}$$

Pomiary: $\{x_i\}_{i=1}^N$ Szukane: $\alpha = ?$

Estymacja parametrów rozkładu potęgowego z danych

► Metoda maksymalnej wiarygodności

$$p(x|\alpha) = \prod_{i=1}^N p(x_i) = \prod_{i=1}^N (\alpha - 1) x_{\min}^{\alpha-1} x_i^{-\alpha}$$

$$\mathcal{L}(\alpha) = \ln p(x|\alpha) = \sum_{i=1}^N \left[\ln(\alpha-1) + (\alpha-1) \ln x_{\min} - \alpha \ln x_i \right] = N \ln(\alpha-1) + N(\alpha-1) \ln x_{\min} - \alpha \sum_{i=1}^N \ln x_i$$

$$p(x) = (\alpha - 1) x_{\min}^{\alpha-1} x^{-\alpha}$$

Pomiary: $\{x_i\}_{i=1}^N$ Szukane: $\alpha = ?$

Estymacja parametrów rozkładu potęgowego z danych

► Metoda maksymalnej wiarygodności

$$p(x|\alpha) = \prod_{i=1}^N p(x_i) = \prod_{i=1}^N (\alpha - 1) x_{\min}^{\alpha-1} x_i^{-\alpha}$$

$p(x) = (\alpha - 1) x_{\min}^{\alpha-1} x^{-\alpha}$
Pomiary: $\{x_i\}_{i=1}^N$ Szukane: $\alpha = ?$

$$\mathcal{L}(\alpha) = \ln p(x|\alpha) = \sum_{i=1}^N \left[\ln(\alpha - 1) + (\alpha - 1) \ln x_{\min} - \alpha \ln x_i \right] = N \ln(\alpha - 1) + N(\alpha - 1) \ln x_{\min} - \alpha \sum_{i=1}^N \ln x_i$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{N}{\alpha - 1} + N \ln x_{\min} - \sum_{i=1}^N \ln x_i = 0$$

Estymacja parametrów rozkładu potęgowego z danych

► Metoda maksymalnej wiarygodności

$$p(x|\alpha) = \prod_{i=1}^N p(x_i) = \prod_{i=1}^N (\alpha - 1) x_{\min}^{\alpha-1} x_i^{-\alpha}$$

$$p(x) = (\alpha - 1) x_{\min}^{\alpha-1} x^{-\alpha}$$

Pomiary: $\{x_i\}_{i=1}^N$ Szukane: $\alpha = ?$

$$\mathcal{L}(\alpha) = \ln p(x|\alpha) = \sum_{i=1}^N \left[\ln(\alpha-1) + (\alpha-1) \ln x_{\min} - \alpha \ln x_i \right] = N \ln(\alpha-1) + N(\alpha-1) \ln x_{\min} - \alpha \sum_{i=1}^N \ln x_i$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{N}{\alpha-1} + N \ln x_{\min} - \sum_{i=1}^N \ln x_i = 0$$

$$\alpha = 1 + \left[-\ln x_{\min} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln x_i \right]^{-1}$$

Estymacja parametrów rozkładu potęgowego z danych

► Metoda maksymalnej wiarygodności

$$p(x|\alpha) = \prod_{i=1}^N p(x_i) = \prod_{i=1}^N (\alpha - 1) x_{\min}^{\alpha-1} x_i^{-\alpha}$$

$$\mathcal{L}(\alpha) = \ln p(x|\alpha) = \sum_{i=1}^N \left[\ln(\alpha-1) + (\alpha-1) \ln x_{\min} - \alpha \ln x_i \right] = N \ln(\alpha-1) + N(\alpha-1) \ln x_{\min} - \alpha \sum_{i=1}^N \ln x_i$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{N}{\alpha-1} + N \ln x_{\min} - \sum_{i=1}^N \ln x_i = 0$$

$$\alpha = 1 + \left[-\ln x_{\min} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln x_i \right]^{-1}$$

$$p(x) = (\alpha - 1) x_{\min}^{\alpha-1} x^{-\alpha}$$

Pomiary: $\{x_i\}_{i=1}^N$ Szukane: $\alpha = ?$

Błąd estymacji:

$$\sigma_{\alpha} = \sqrt{N+1} \left[-\ln x_{\min} + \sum_{i=1}^N \ln x_i \right]^{-1}$$

$$\sigma_{\alpha} \approx \frac{\alpha-1}{\sqrt{N}}, \quad \text{dla } N \gg 1$$

KONIEC