

Modele systemów dynamicznych

<https://dlaczegologia.pl/>



Wykład 1. Wstęp. Opisy sygnałów

Prof. zw. dr hab. inż. Jerzy Świątek
pokój 120, budynek C-3

Poniedziałek parzysty godz. 7⁰⁰-9⁰⁰
Poniedziałek godz. 12⁰⁰-13⁰⁰ w trybie zdalnym
środa 11⁰⁰-13⁰⁰



Godziny konsultacji

Kolokwium zaliczeniowe

- ⌘ Termin zero zaliczenia: 22.06.2026 (poniedziałek)
sala 22, budynek C-3, godzina 7³⁰-7⁴⁵
- ⌘ Termin zaliczenia: 22.06. 2026 (poniedziałek)
sala 22, budynek C-3, godzina 7⁴⁵-9⁰⁰

Termin „zero” - zasady

- ✂ Pozytywne aktualne (tegoroczne) zaliczenie form pomocniczych ≥ 3.0
- ✂ Propozycja oceny – wartość średnia z części całkowitej sumy ocen form pomocniczych

$$\text{tj.: propozycja oceny} = \frac{[\text{ćwiczenia} + \text{laboratoria}]}{2} \geq 3.5$$

- ✂ Obecność na ostatnim wykładzie
- ✂ Nieobecni (bez względu na przyczynę) rezygnują ze zwolnienia
- ✂ Można wcześniej ale nie po terminie 0. Należy przedstawić potwierdzoną ocenę.

Osoby, które mają zaliczenie form pomocniczych z ubiegłych lat proszę o przedstawienie udokumentowanej oceny przed terminem „zero”

Zakładane efekty kształcenia

☞ CELE PRZEDMIOTU

- C1 Nabycie wiedzy o metodach modelowania procesów dynamicznych.
- C2 Nabycie umiejętności opracowywania komputerowych modeli systemów dynamicznych z wykorzystaniem środowiska obliczeń inżynierskich

☞ Z ZAKRESU WIEDZY:

- PEK_W01 Znajomość podstawowych pojęć związanych z modelowaniem ciągłych i dyskretnych obiektów dynamicznych

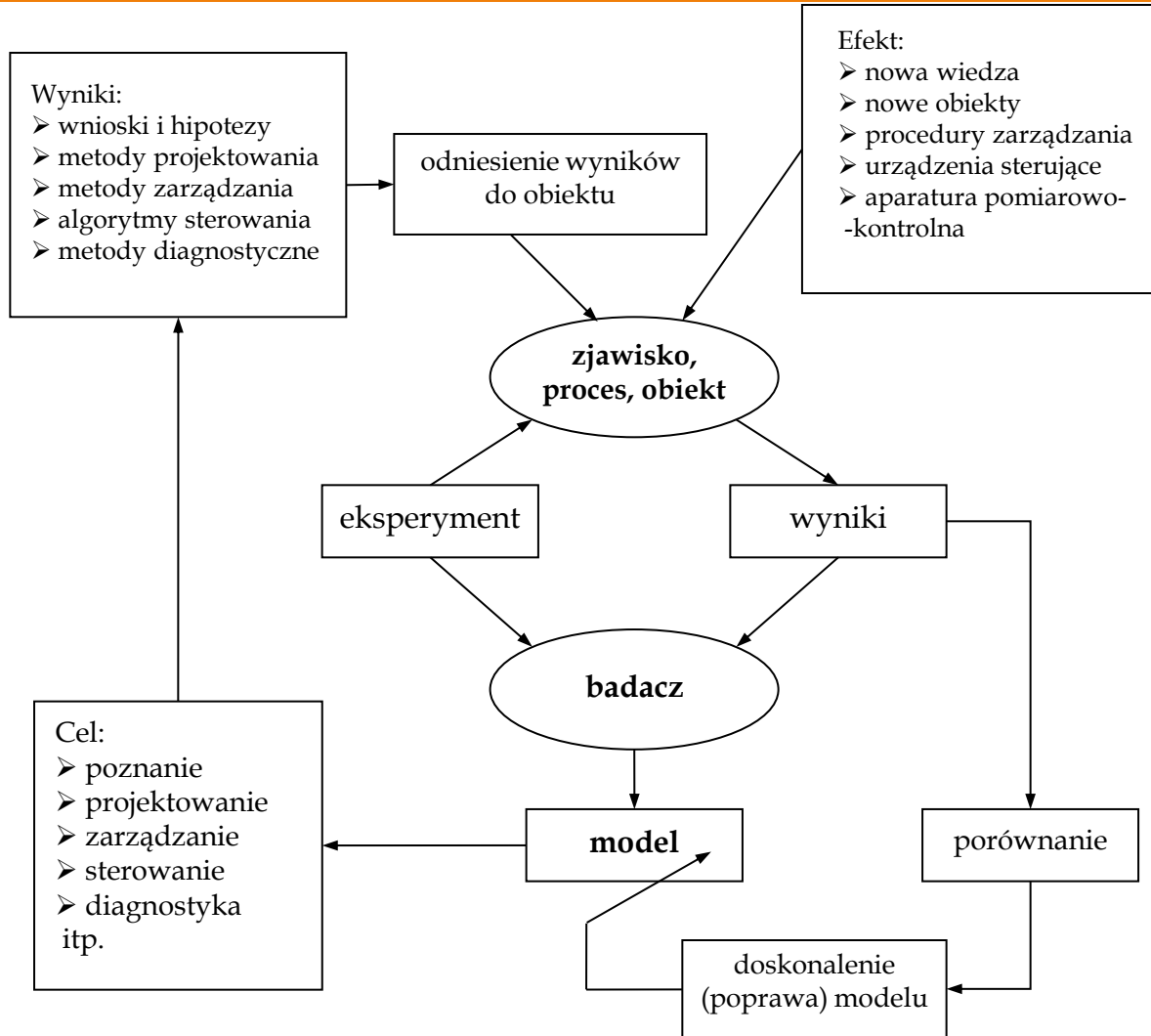
☞ Z ZAKRESU UMIEJĘTNOŚCI:

- PEK_U01 Umie przeprowadzić analizę ciągłych i dyskretnych procesów dynamicznych
- PEK_U02 Umie wykorzystać środowisko obliczeniowe MATLAB i pakiet SIMULINK do symulacji komputerowej i analizy procesów dynamicznych.

Analiza systemowa

- ∞ Analiza systemowa – zbiór metod i technik wspomagających analizę, projektowanie, zarządzanie i sterowanie w złożonych sytuacjach
 - Systematyczny sposób analizy złożonych problemów w celu **osiągnięcia określonego celu**
 - Opracowanie propozycji różnych rozwiązań z uwzględnieniem **złożonego celu** oraz wielu kryteriów oceny rozwiązania
 - Wspomaganie decydenta w wyborze optymalnego rozwiązania spośród wielu możliwości

Model w badaniach systemowych



Przegląd treści wykładu

- Modele systemów dynamicznych. Wstęp, pojęcia podstawowe
- Sygnały ciągłe – Transformata Laplace’a.
- Sygnały dyskretne – Transformata Z.
- Rozwiązywanie liniowych równań różniczkowych i różnicowych,
- Typowe opisy ciągłych i dyskretnych obiektów dynamicznych - równia stanu, równania różniczkowe i różnicowe, transmitancja, charakterystyki częstotliwościowe.
- Podstawowe liniowe człony dynamiczne.
- Sterowalność i obserwowalność systemu - powiązania pomiędzy opisami.
- Stabilność liniowych obiektów dynamicznych.
- Dyskretyzacja sygnałów ciągłych. Opis obiektu ciągłego sterowanego sygnałem dyskretnym w czasie
- Systemy złożone. Schematy blokowe systemów i ich przekształcanie

Przegląd treści ćwiczeń

- Powtórzenie wybranych wiadomości z analizy matematycznej i algebry: pojęcie pochodnej, macierzy, układy równań liniowych.
- Przykłady procesów dynamicznych i ich modele w postaci równań różniczkowych.
- Transformata Laplace'a i analityczne rozwiązania liniowych równań różniczkowych.
- Opis w postaci wektora stanu i transmitancja.
- Związki między równaniem różniczkowym, opisem w postaci wektora stanu i transmitancją.
- Linearyzacja układów nieliniowych.
- Analiza procesów dynamicznych. Stabilność.
- Numeryczne metody rozwiązywania równań różniczkowych. Schemat Eulera. Związki pomiędzy opisami ciągłymi i dyskretnymi.
- Przykłady procesów dyskretnych i ich modele w postaci równań różnicowych. Transformata Z.
- Rozwiązywanie równań różnicowych.
- Obserwowalność i sterowalność.

Przegląd treści laboratorium

- Szkolenie BHP. Organizacja zajęć.
- Wprowadzenie do pakietu obliczeń inżynierskich MATLAB. Podstawy pracy w oknie poleceń. Tworzenie skryptów. Wykresy.
- Zaawansowane funkcje pakietu MATLAB. Przetwarzanie danych. Tworzenie funkcji, proste programy. Sprawdzian.
- Rozwiązywanie równań różniczkowych w środowisku MATLAB. Schemat Eulera.
- Modelowanie procesów dynamicznych w środowisku MATLAB z wykorzystaniem wbudowanych funkcji (ode45, ode23, dde23 itp.). Sprawdzian.
- Wprowadzenie do pakietu SIMULINK.
- Modelowanie procesów dynamicznych w środowisku SIMULINK.
- Implementacja komputerowego systemu symulacji i analiza wybranego rzeczywistego procesu dynamicznego. Sprawdzian.

Literatura

⌘ LITERATURA PODSTAWOWA:

- ⌘ Brzostowski K., Drapała J. – *Systems modelling and identification*, skrypt PWr.
- ⌘ Gutenbaum J., Modelowanie matematyczne systemów, Instytut Badań Systemowych PAN, 2003.
- ⌘ Osowski S., *Modelowanie i symulacja układów i procesów dynamicznych*, 2007.
- ⌘ Ljung L., Glad T., *Modelling of dynamic systems*, 1994.

⌘

⌘ LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA:

- ⌘ Fishwick P.A., *Handbook of Dynamic System Modelling*, Chamman & Hall/CRS Taylor & Francis Group, London, New York, 2007.
- ⌘ Logan J.D., *A First Course in Differential Equations*, Springer, 2006.
- ⌘ L.F. Shampine, I. Gladwell, S. Thompson – *Solving ODEs with MATLAB*, Cambridge Univ. Press, 2003.

Co to jest system?

∞ Pojęcie system

- nauka, technika, kultura, publicystyka, życie społeczne (system polityczny, etyczny, filozoficzny)

∞ Systemy naturalne

- Kosmiczne
- Geotektoniczne
- Klimatyczne
- Biologiczne
- Społeczne
- inne

Co to jest system?

✧ Systemy abstrakcyjne

- Etyczne
- Filozoficzne
- Religijne
- Kulturalne
- Prawne
- Polityczne
- inne

✧ Systemy intelektualne

- Badawcze
- Projektowe
- Obliczeniowe
- Ekspertowe
- inne

Co to jest system?

⌘ Systemy gospodarcze

- Produkcyjne
- Usługowe
- Administracyjne
- inne

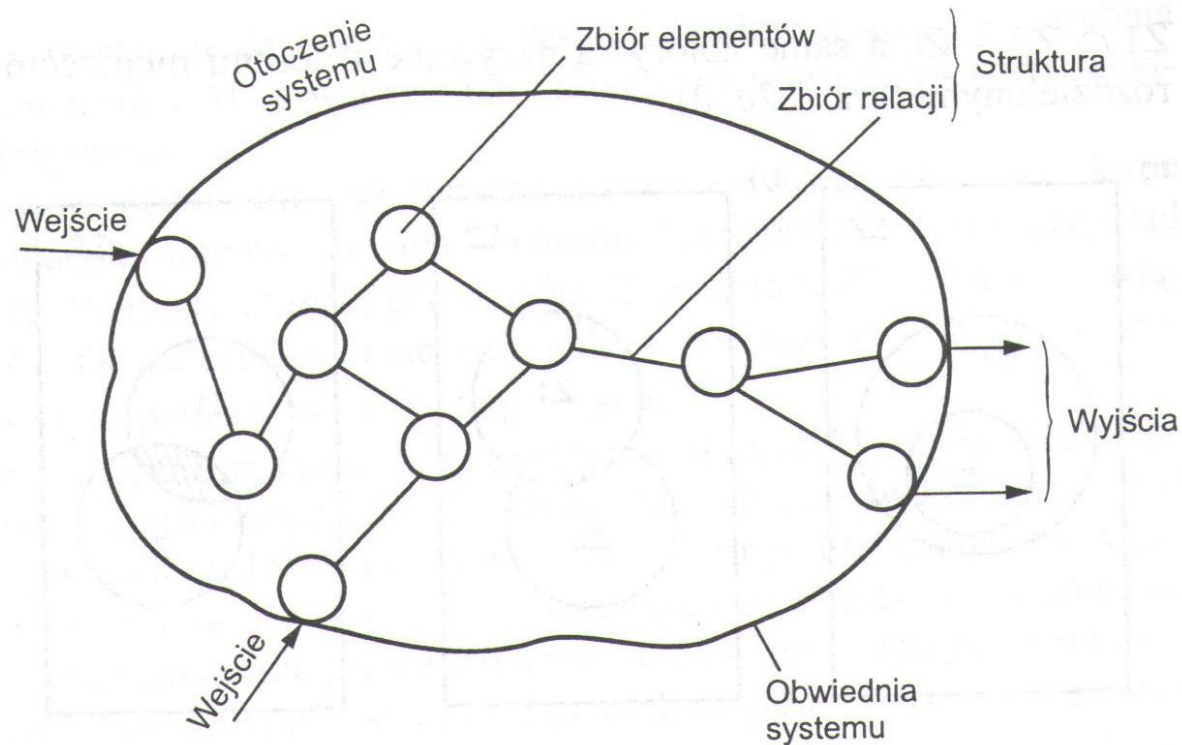
⌘ Systemy Techniczne

- Mechaniczne
- Elektryczne
- Budowlane
- Transportowe
- inne

Co to jest system?

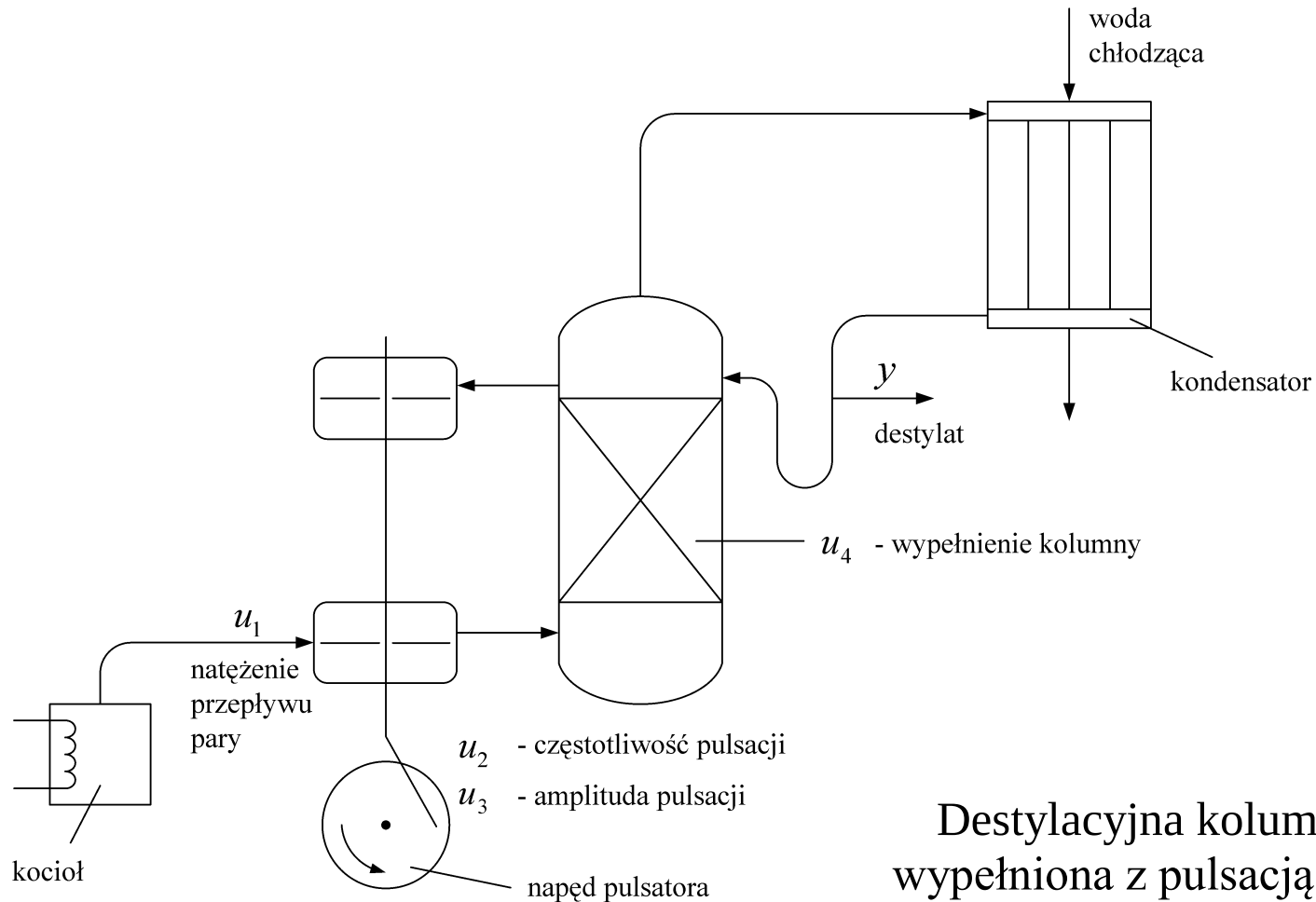
- ⌘ **System** to byt przejawiający istnienie przez synergiczne współdziałanie swych części.
- ⌘ **System** to zbiór (zespół, kompleks) współdziałających ze sobą elementów, stanowiący celowo zorientowaną jedną całość. Elementy systemu posiadają pewne właściwości lub atrybuty oraz znajdują się w określonych relacjach (związkach) między sobą.
- ⌘ **System** to byt będący zbiorem elementów z określonymi właściwościami i relacjami, stanowiący jedną celowościową całość.
- ⌘ **System** to zbiór wzajemnie zależnych elementów pracujących razem dla pewnego wspólnego celu.
- ⌘ **System** jest zbiorem elementów tworzących złożoną całość, związanych zależnościami funkcjonalnymi i posiadającym określony cel (zamysł) np. system transportowy.

Co to jest system?



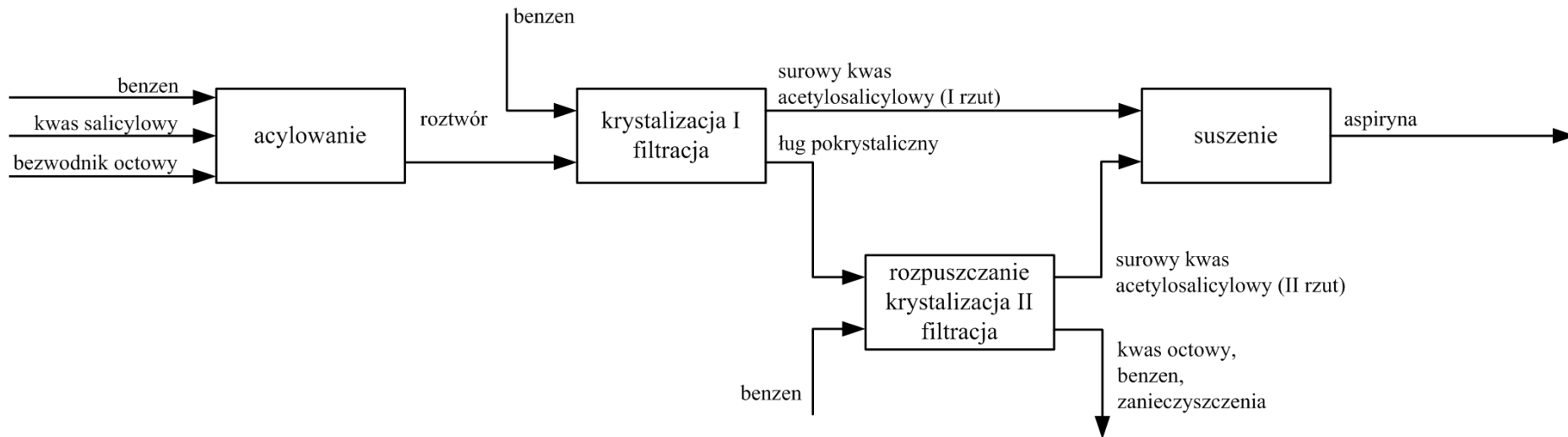
Model systemu

Przykład systemu



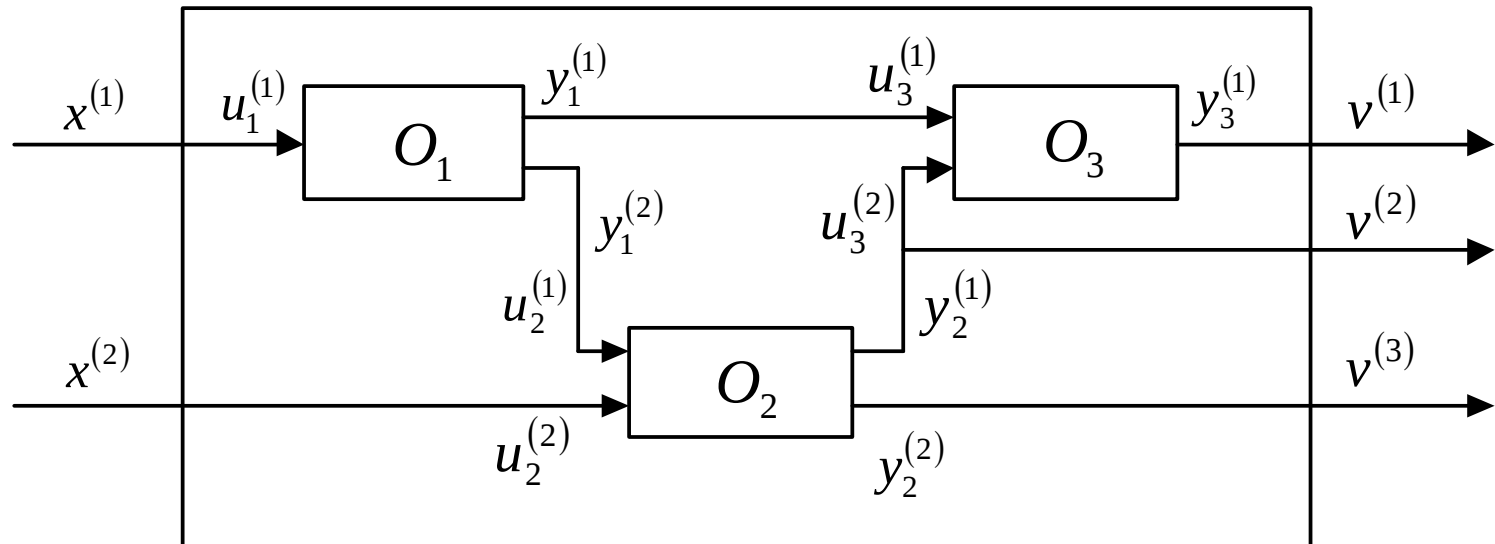
Destylacyjna kolumna
wypełniona z pulsacją fazy
parowej

Przykład sytemu



System produkcji aspiryny

Opis systemu złożonego



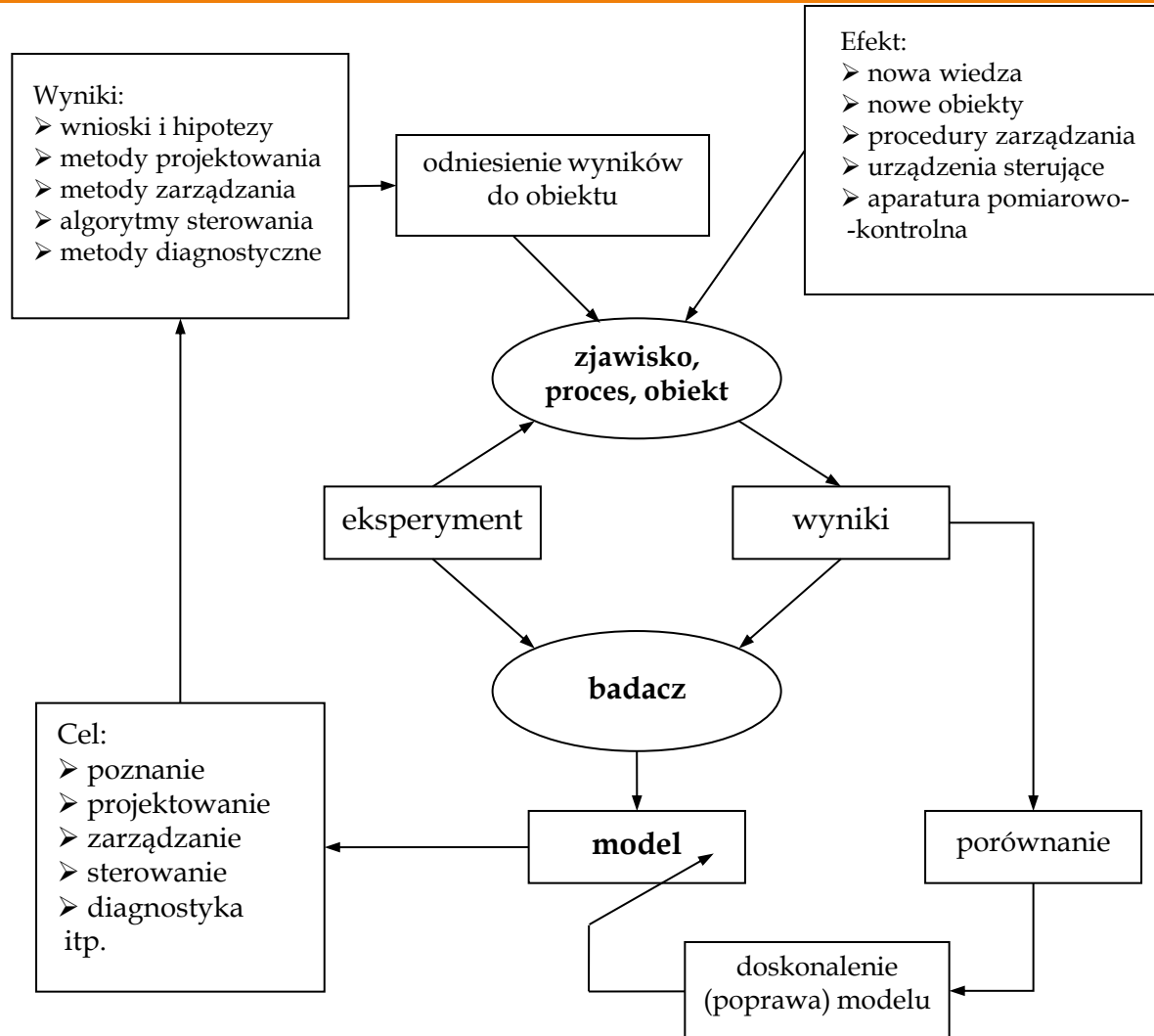
Przykład systemu złożonego

Elementy (komponenty) systemu - procesy w systemach

- ✎ **Elementy (komponenty) systemu** - działające części systemu składającego się z wejścia i wyjścia.
- ✎ Elementy mają następujące właściwości:
 - właściwości i zachowanie każdego elementu systemu oddziałuje na właściwości i zachowanie systemu jako całości,
 - właściwości i zachowanie każdego elementu systemu zależy od właściwości i zachowania co najmniej jednego innego elementu systemu,
 - każdy możliwy podsystem ma powyższe właściwości, nie ma możliwości podziału elementów na niezależne podsystemy.

Właściwości te zapewniają, że zbiór komponentów składających się na system, zawsze ma pewną charakterystykę albo zachowanie, które nie może być wykazywane przez jakiś z podsystemów. System to coś więcej niż suma jego komponentów. Elementy systemu same mogą być systemami i każdy system może być częścią większego w hierarchii systemu.

Model w badaniach systemowych

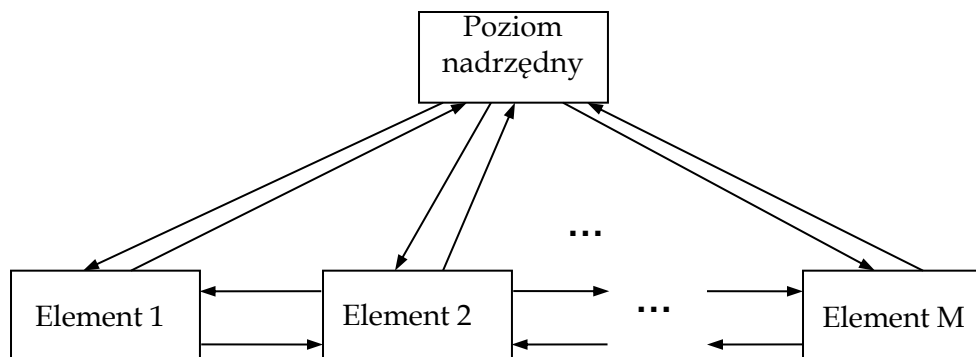


Model w badaniach systemowych

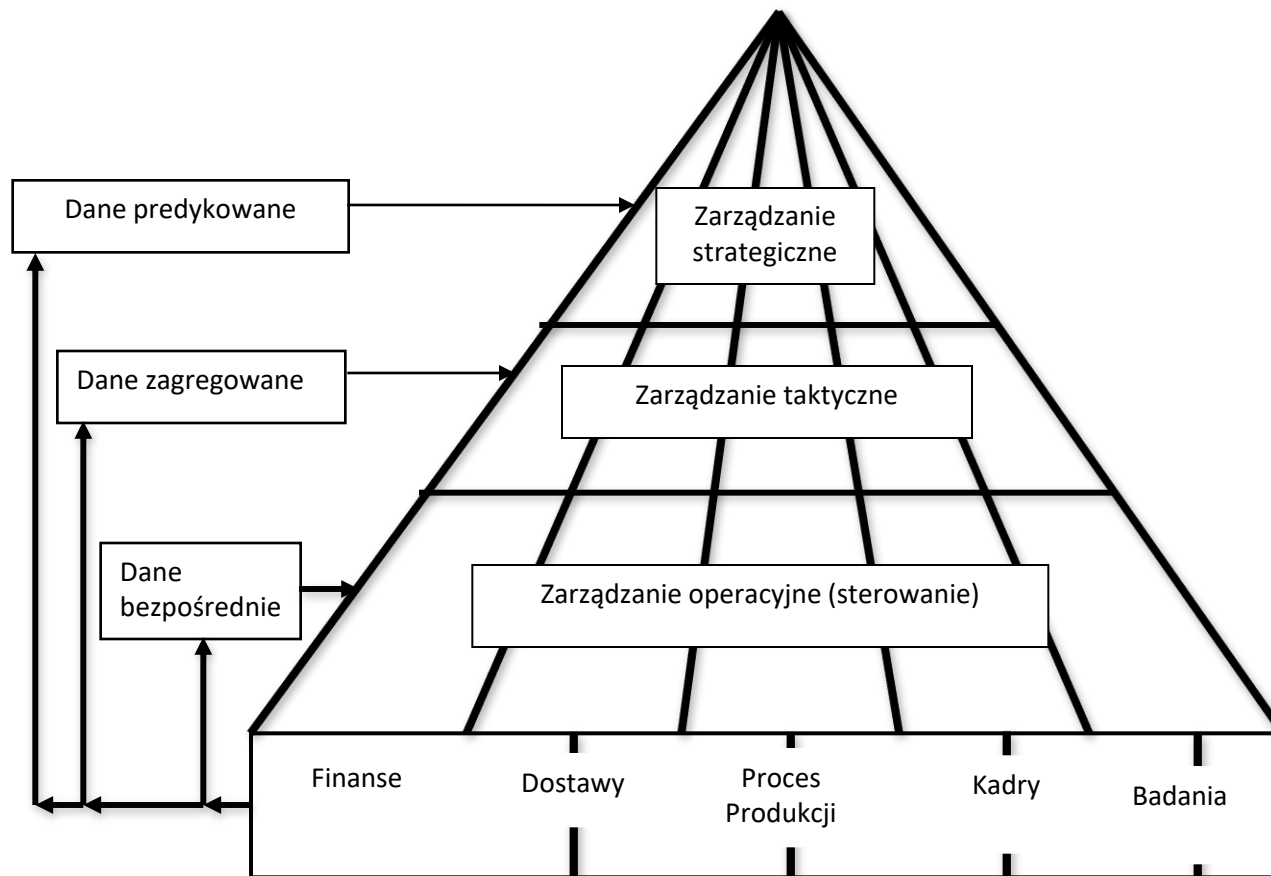
- ∞ Model jest uproszczoną reprezentacją systemu, w czasie i przestrzeni, stworzoną w zamiarze zrozumienia zachowania systemu rzeczywistego
- ∞ Modele konceptualne
- ∞ Modele fizyczne
- ∞ Modele analogowe
- ∞ Modele matematyczne
- ∞ Modele komputerowe

Modele konceptualne

- ✎ Jak system (proces) proces jest zorganizowany?
 - Elementy systemu (procesu)
 - Powiązania pomiędzy elementami
 - Podstawowe funkcje elementów
- ✎ Przykład – dwustopniowy system zarządzania



Modele konceptualne



Modele fizyczne

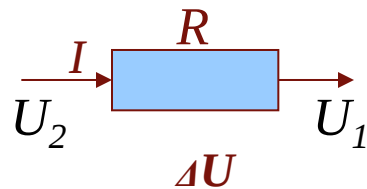
- ∞ Badany proces odzwierciedlony w skali laboratoryjnej – zachowana jest natura zjawiska
 - Tunel aerodynamiczny



http://www.absoluteastronomy.com/topics/Wind_tunnel

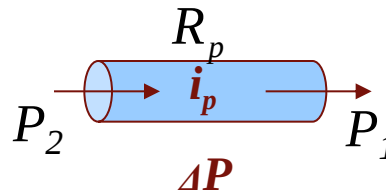
Modele analogowe

∞ Przykłady analogii fizycznych



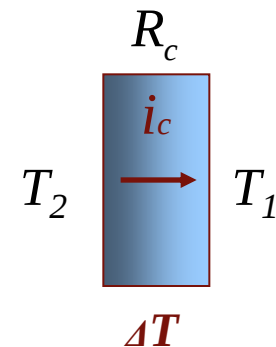
$$U_2 - U_1 = R I$$

Obiekt elektryczny



$$P_2 - P_1 = i_p R_p$$

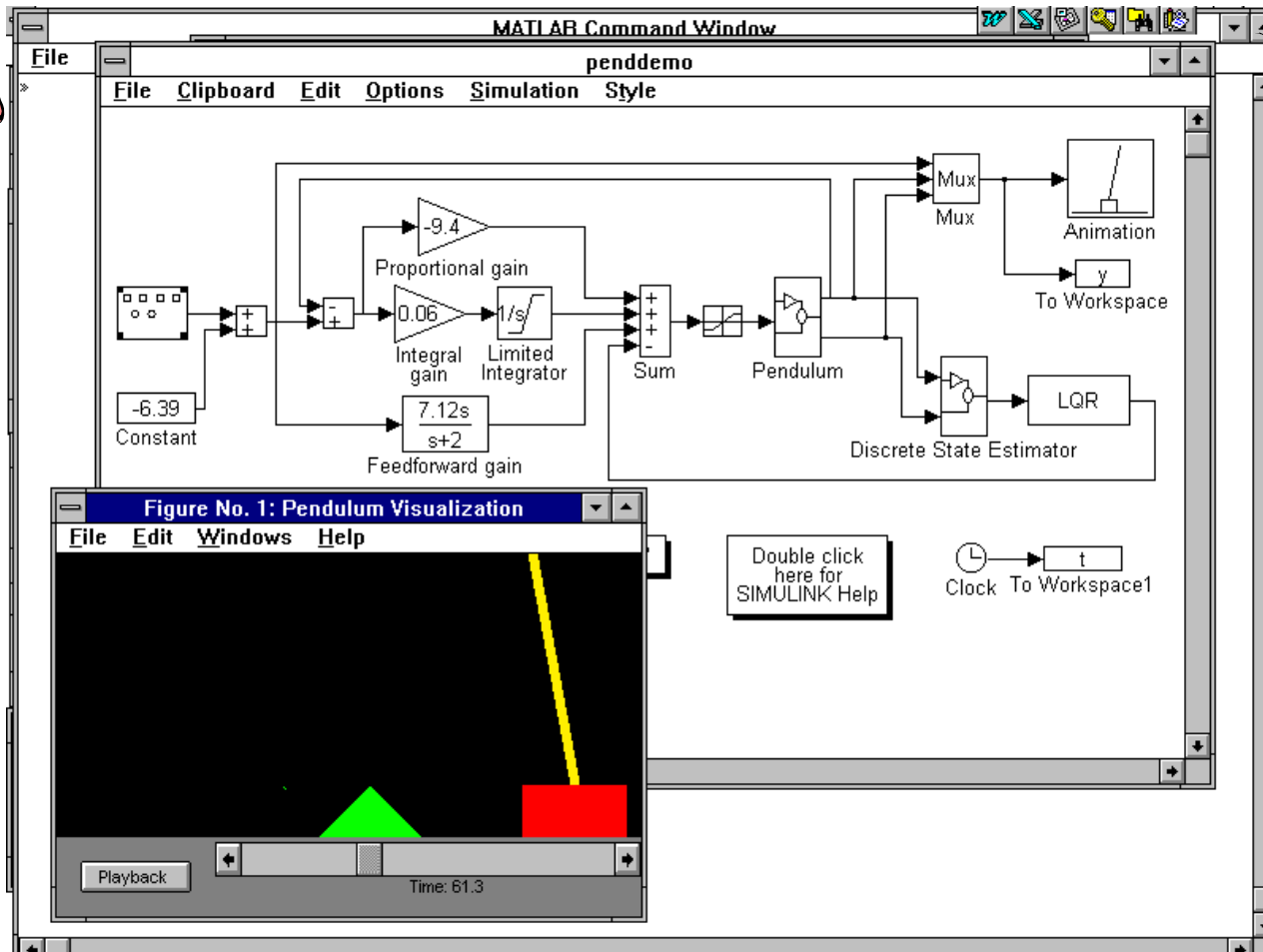
Obiekt hydrauliczny



$$T_2 - T_1 = i_c R_c$$

Obiekt termiczny

Modele analogowe



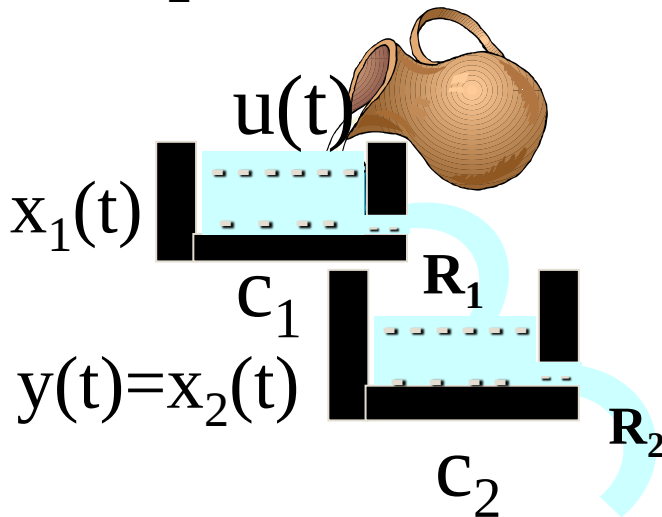
Modele matematyczne

- ⌘ Zestaw równań opisujących badany proces
 - Zależności statyczne
 - Własności dynamiczne – równania różniczkowe, różnicowe
 - Modele probabilistyczne
- ⌘ Zestaw prawdziwych zdań logicznych
 - Wiedza eksperta

Przykład 1

Przykład 2

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = -\frac{R_1}{c_1}x_1(t) + \frac{1}{c_1}u(t)$$
$$\frac{d}{dt}x_2(t) = \frac{R_1}{c_2}x_1(t) - \frac{R_2}{c_2}x_2(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$



$$x_{n+1} = |x_n + u_n| \text{ modulo } 2$$

$$y_n = x_n$$

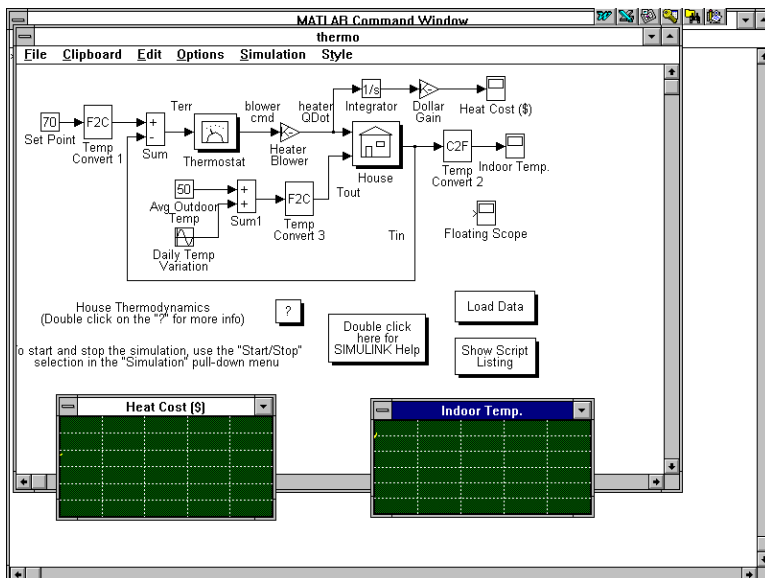
$$u_n \in \{0, 1\}$$



Model komputerowy

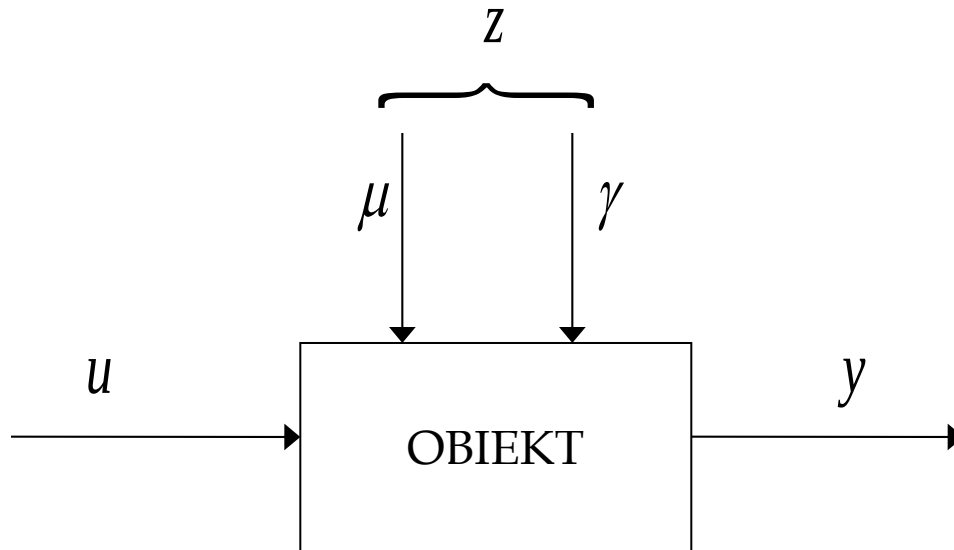
∞ Analogowy

Cyfrowy



```
program ADA;
var i,klucz :integer;
    Napis    : string;
    Napis_sz : array[1..100] of char;
Procedure czytaj;
begin
    Write('Podaj klucz: ');
    readln(klucz);
    If klucz <=0 then writeln('Błędne dane')
    else
        ...
        ...
        ...
    readln;
end.
```

Określenie obiektu



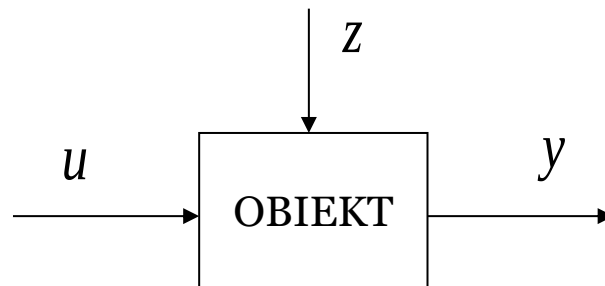
u - wejście

y - wyjście

μ - zakłócenia mierzalne

γ - zakłócenia niemierzalne

Przypadek statyczny



$$\mathcal{U} : ? \quad \mathcal{Y} : ? \quad \mathcal{Z} : ?$$

$$u \text{ - wejście} \quad u \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^S$$

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{R}^S, \varphi_u(u) = \bar{0}_{L_u}, \psi_u(u) \leq \bar{0}_{M_u}\}$$

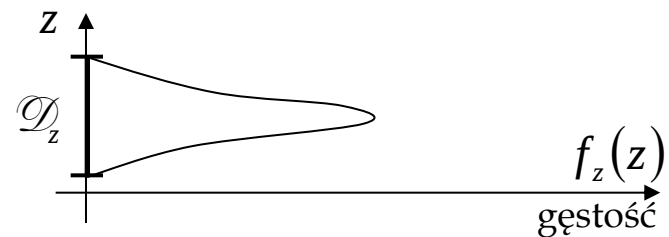
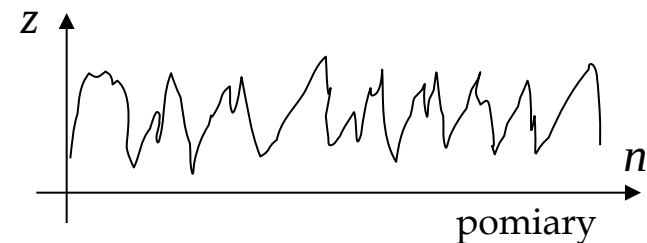
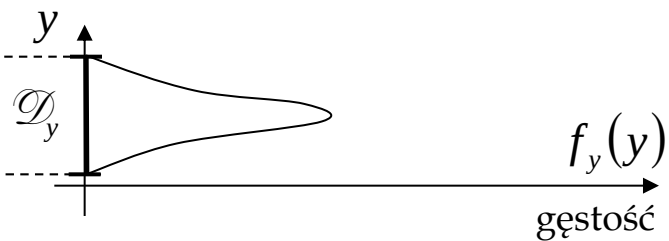
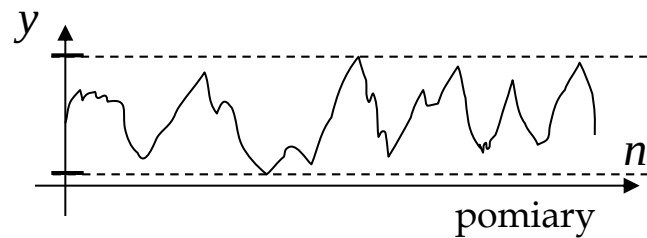
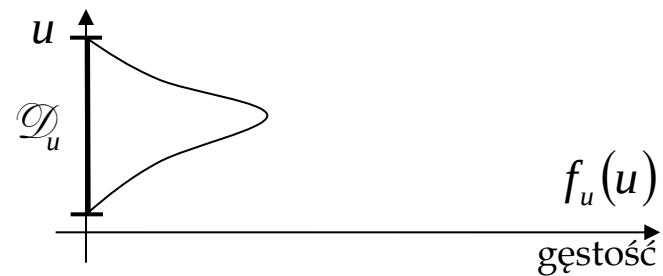
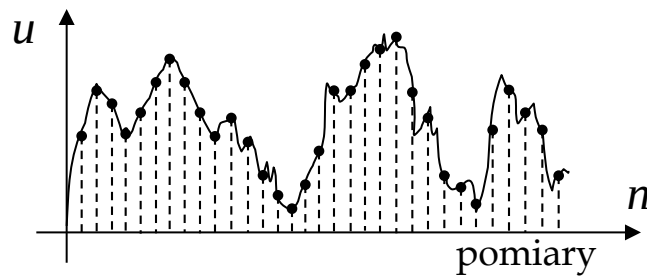
$$y \text{ - wyjście} \quad y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{R}^L$$

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathcal{R}^L, \varphi_y(y) = \bar{0}_{L_y}, \psi_y(y) \leq \bar{0}_{M_y}\}$$

$$z \text{ - zakłócenia} \quad z \in \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{R}^L$$

$$\mathcal{Z} = \{z \in \mathcal{R}^L, \varphi_z(z) = \bar{0}_{L_z}, \psi_z(z) \leq \bar{0}_{M_z}\}$$

Przypadek statyczny



n - krok pomiaru

Przypadek Dynamiczny



$u(t)$ - Sygnał wejściowy (*ciągły*)

$y(t)$ - Sygnał wyjściowy (*ciągły*)

u_n - Sygnał wejściowy (*dyskretny*)

y_n - Sygnał wyjściowy (*dyskretny*)

$f(t)$ - Sygnał ciągły

f_n - Sygnał dyskretny

Sygnały Ciągłe



Transformata Laplace'a

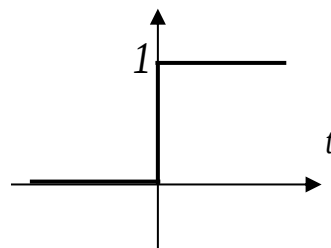
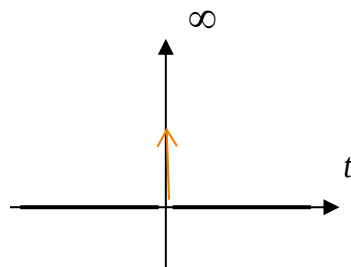
Często używane sygnały ciągłe

$\delta(t)$ - Delta Dirac a

$$\delta(t) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

$\mathbf{1}(t)$ - Skok jednostkowy

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



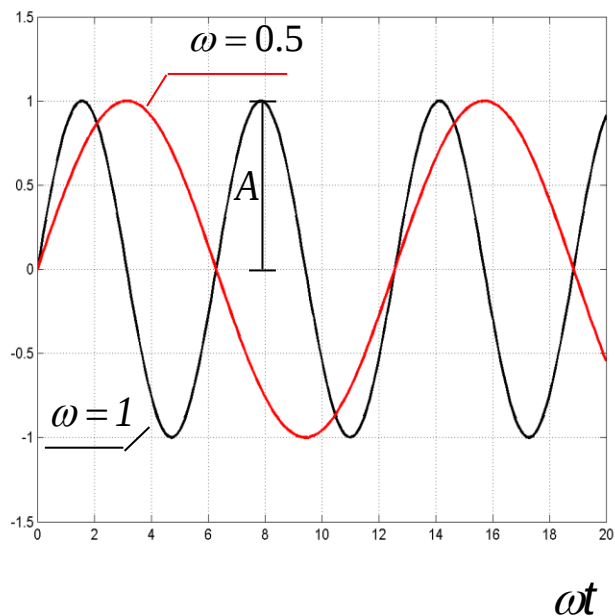
Własności: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

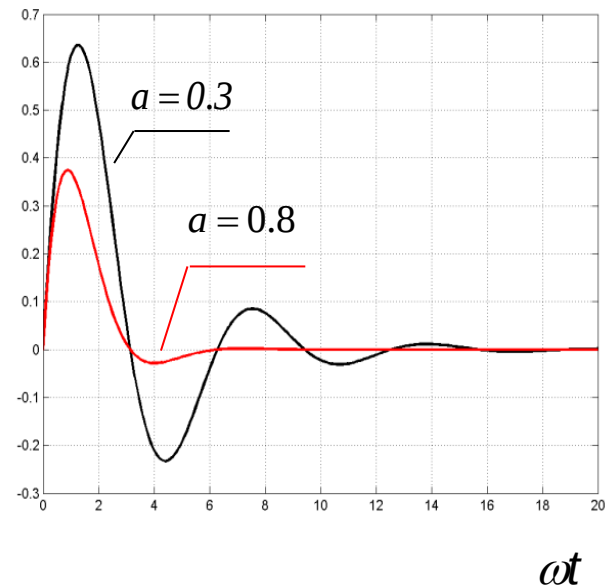
$$\frac{d}{dt} \mathbf{1}(t) = \delta(t)$$

Często używane sygnały ciągłe

$A \sin \omega t$ – sygnał sinusoidalny



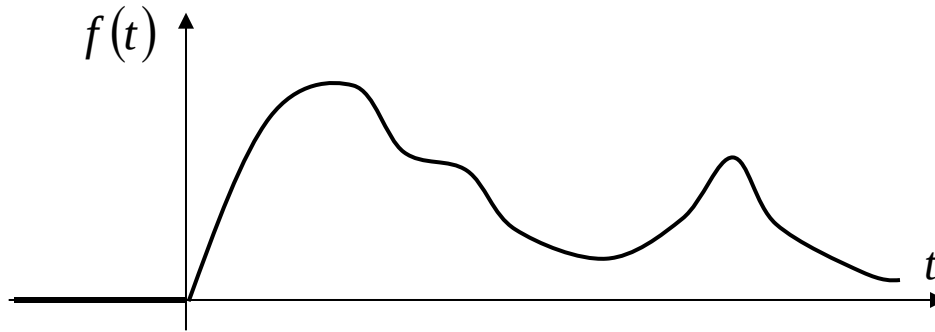
$e^{-at} \sin \omega t$ – tłumiony sygnał sinusoidalny



Transformata Laplace'a

Rozważmy funkcję $f(t)$, dla której $f(t) = 0$ dla $t < 0$

Dla każdego t , $|f(t)| < \infty$ zachodzi $\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt < \infty$



Definicja transformaty Laplace'a:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

gdzie: s - Zmienna zespolona: $s = \sigma + j\omega$

Transformata Laplace'a

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\mathbf{1}(t)t$	$\frac{1}{s^2}$
$\mathbf{1}(t)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{s^k}$
$\mathbf{1}(t)e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$\mathbf{1}(t)\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\mathbf{1}(t)\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Transformata Laplace'a

Odwrotna transformata Laplace'a:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$$

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \rightarrow & F(s) \\ & \text{przekształcenia} & \downarrow \\ f'(t) & \leftarrow & F'(s) \end{array}$$

Sygnały Dyskretne

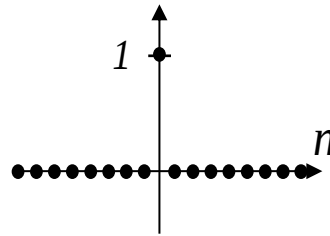


Transformata $\mathcal{Z}$

Często spotykane sygnały dyskretne

δ_n - Delta Kroneckera

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

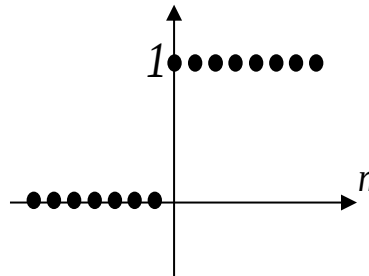


Własność:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n-k} a_{n-k} = a_k$$

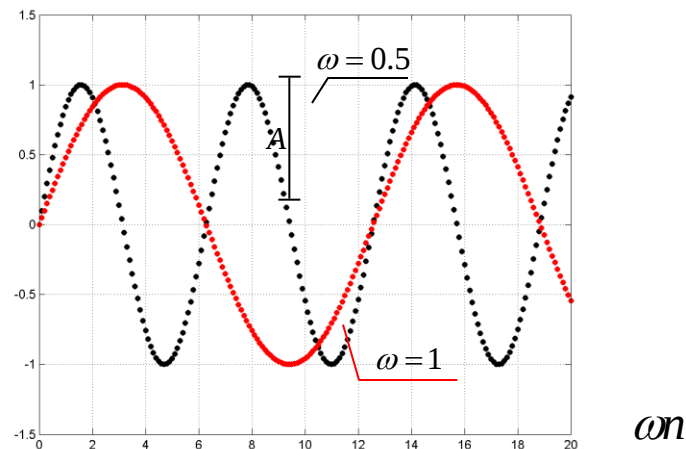
$\mathbf{1}_n$ - Dyskretny skok jednostkowy

$$\mathbf{1}_n = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



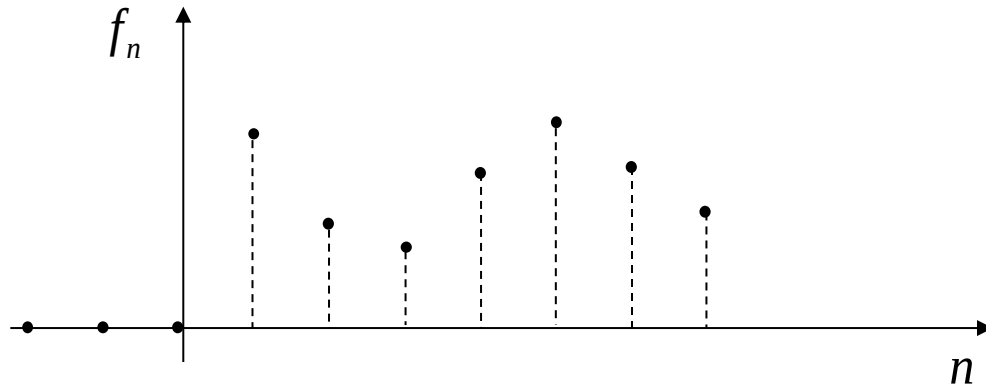
Frequently used discrete signals (2)

$A \sin \omega n$ - Dyskretny sygnał sinusoidalny



Transformata $\mathcal{Z}$

Rozważmy ciąg liczbowy f_n dla którego $f_n = 0$ dla $n < 0$



Dla każdego n , $|f_n| < \infty$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n z^{-n}| = 0$

z - zmienna zespolona : $z = \sigma + j\omega$

Transformata $\mathcal{Z}$

Definicja transformaty $\mathcal{Z}$:

$$F(z) = \mathcal{Z}[f_n] \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

Odwrotna transformata $\mathcal{Z}$:

$$f_n = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(z) z^{n-1} dz$$

Transformata $\mathcal{Z}$

f_n	$F(z)$
δ_n	1
$\mathbf{1}_n$	$\frac{z}{z-1}$
$\mathbf{1}_n \cdot n$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\mathbf{1}_n \cdot n^2$	$\frac{z^2 + z}{(z-1)^2}$
$\mathbf{1}_n \cdot a^n$	$\frac{z}{z-a}$
$\mathbf{1}_n \cdot \sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$\mathbf{1}_n \cdot \cos \omega n$	$\frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$

Transformata $\mathcal{Z}$

$$\begin{array}{ccc} f_n & \rightarrow & F(z) \\ & \text{przekształcenia} & \downarrow \\ f'_n & \leftarrow & F'(z) \end{array}$$

Dziękuję za uwagę

