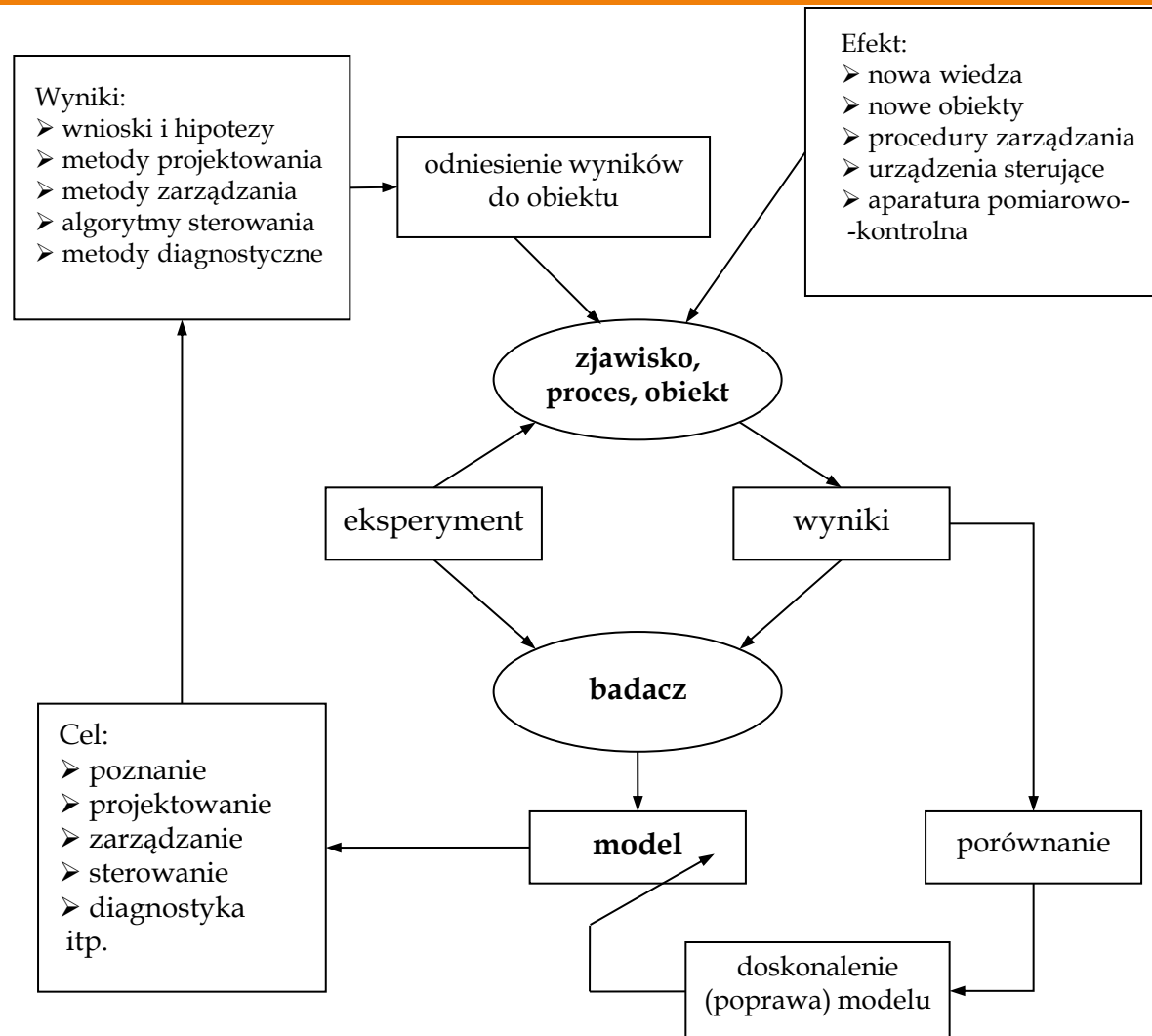


Modele systemów dynamicznych



Wykład 2. Opisy sygnałów

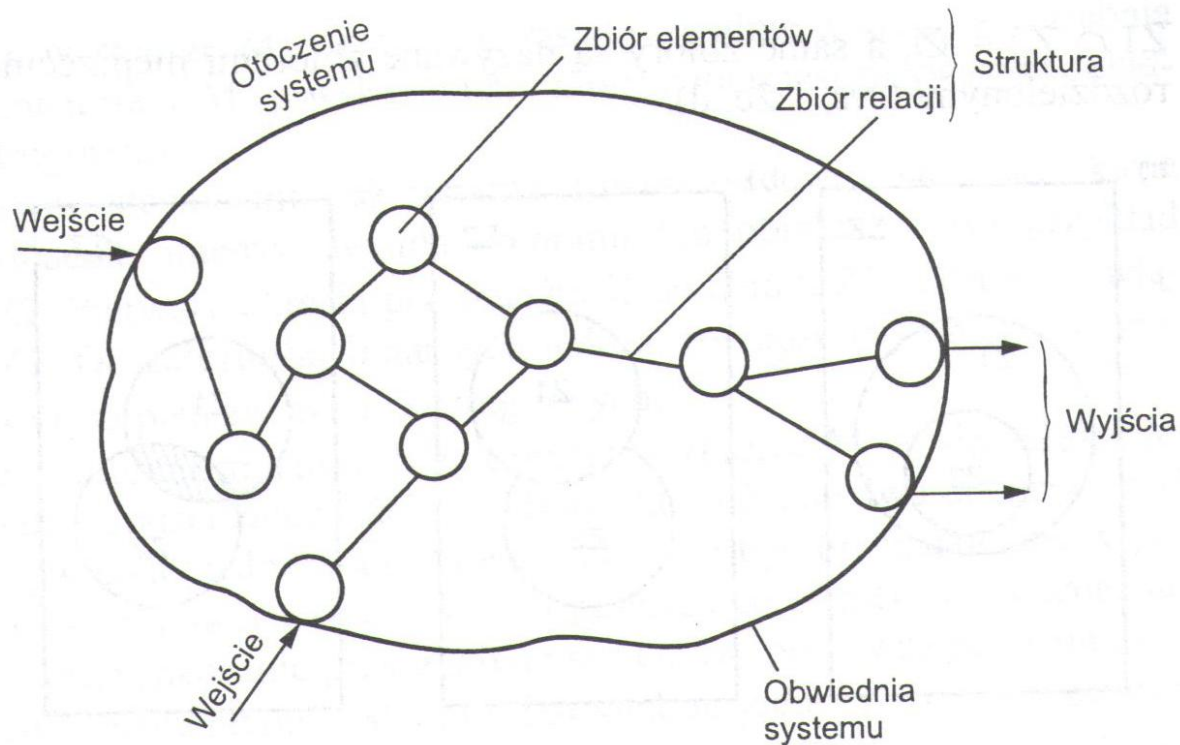
Model w badaniach systemowych



Co to jest system?

- ⌘ **System** to byt przejawiający istnienie przez synergiczne współdziałanie swych części.
- ⌘ **System** to zbiór (zespół, kompleks) współdziałających ze sobą elementów, stanowiący celowo zorientowaną jedną całość. Elementy systemu posiadają pewne właściwości lub atrybuty oraz znajdują się w określonych relacjach (związkach) między sobą.
- ⌘ **System** to byt będący zbiorem elementów z określonymi właściwościami i relacjami, stanowiący jedną celowościową całość.
- ⌘ **System** to zbiór wzajemnie zależnych elementów pracujących razem dla pewnego wspólnego celu.
- ⌘ **System** jest zbiorem elementów tworzących złożoną całość, związanych zależnościami funkcjonalnymi i posiadającym określony cel (zamysł) np. system transportowy.

Co to jest system?

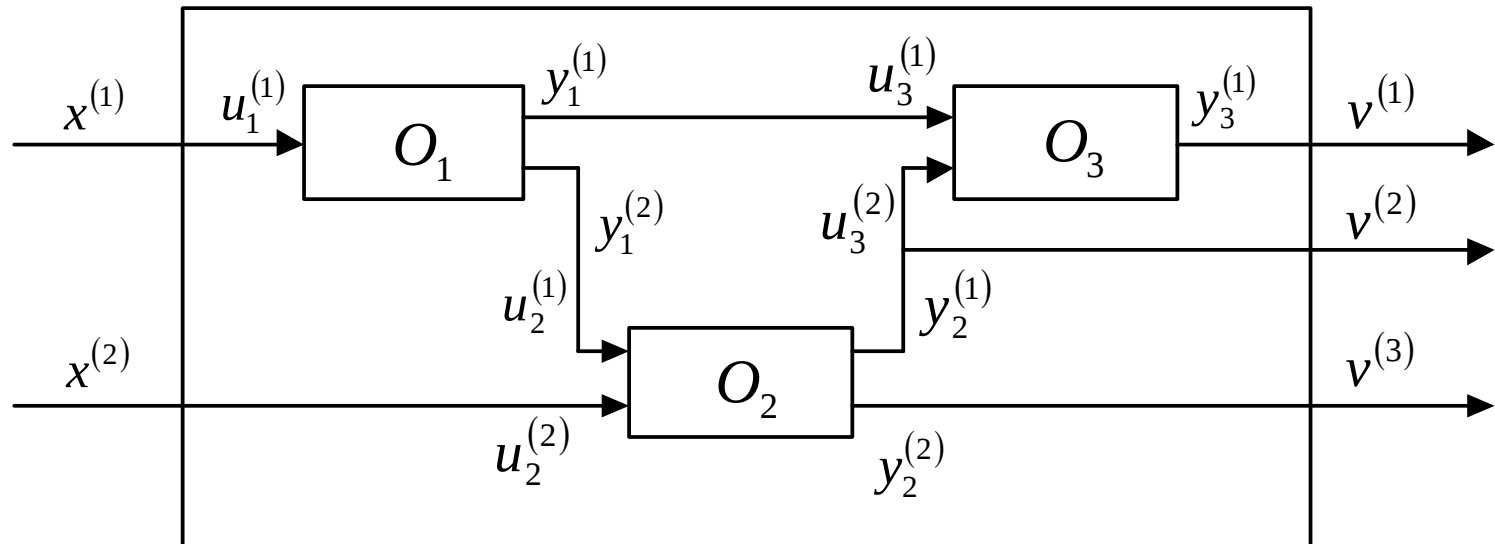


Model systemu

Analiza systemowa

- ∞ Analiza systemowa – zbiór metod i technik wspomagających analizę, projektowanie, zarządzanie i sterowanie w złożonych sytuacjach
 - Systematyczny sposób analizy złożonych problemów w celu **osiągnięcia określonego celu**
 - Opracowanie propozycji różnych rozwiązań z uwzględnieniem **złożonego celu** oraz wielu kryteriów oceny rozwiązania
 - Wspomaganie decydenta w wyborze optymalnego rozwiązania spośród wielu możliwości

Opis systemu złożonego



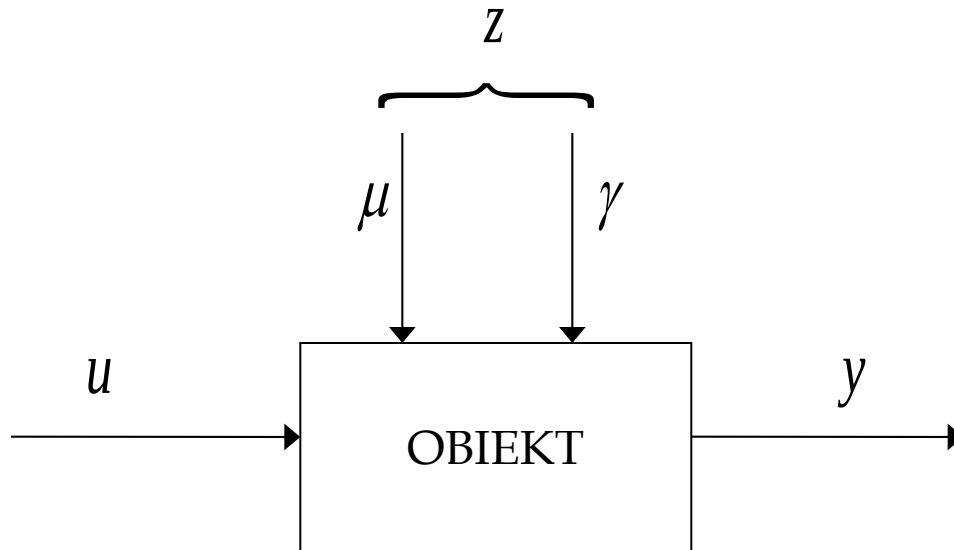
Przykład systemu złożonego

Elementy (komponenty) systemu - procesy w systemach

- ✎ **Elementy (komponenty) systemu** - działające części systemu składającego się z wejścia i wyjścia.
- ✎ Elementy mają następujące właściwości:
 - właściwości i zachowanie każdego elementu systemu oddziałuje na właściwości i zachowanie systemu jako całości,
 - właściwości i zachowanie każdego elementu systemu zależy od właściwości i zachowania co najmniej jednego innego elementu systemu,
 - każdy możliwy podsystem ma powyższe właściwości, nie ma możliwości podziału elementów na niezależne podsystemy.

Właściwości te zapewniają, że zbiór komponentów składających się na system, zawsze ma pewną charakterystykę albo zachowanie, które nie może być wykazywane przez jakiś z podsystemów. System to coś więcej niż suma jego komponentów. Elementy systemu same mogą być systemami i każdy system może być częścią większego w hierarchii systemu.

Określenie obiektu



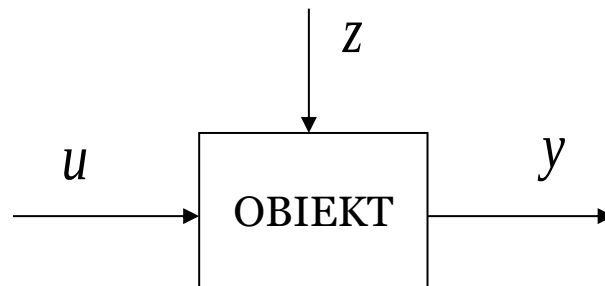
u - wejście

y - wyjście

μ - zakłócenia mierzalne

γ - zakłócenia niemierzalne

Przypadek statyczny



$\mathcal{U} : ? \quad \mathcal{Y} : ? \quad \mathcal{Z} : ?$

u - wejście $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^S$

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^S, \varphi_u(u) = \bar{0}_{L_u}, \psi_u(u) \leq \bar{0}_{M_u}\}$$

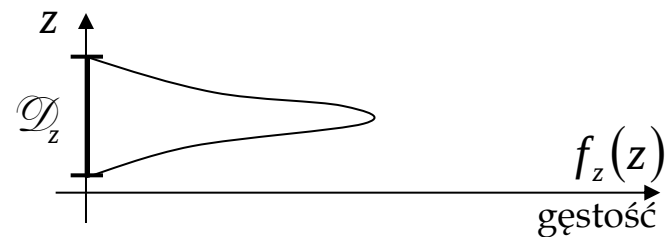
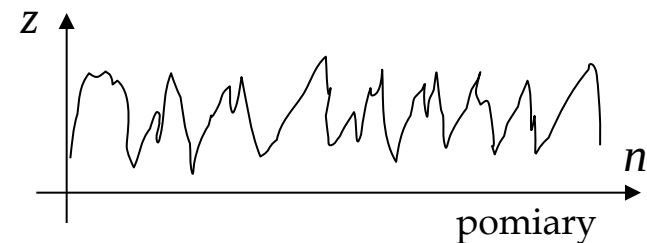
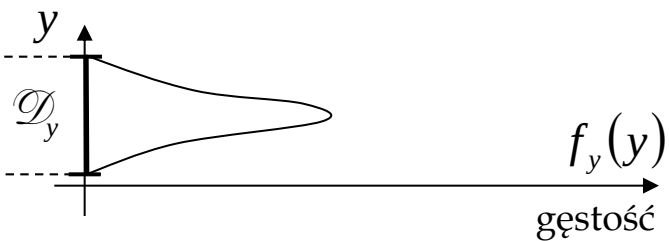
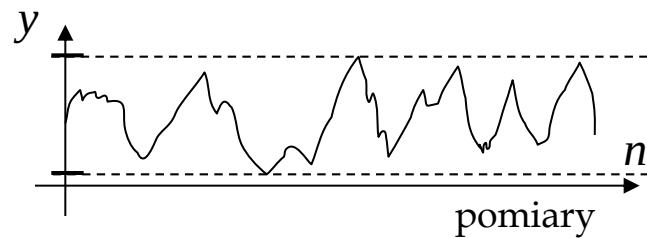
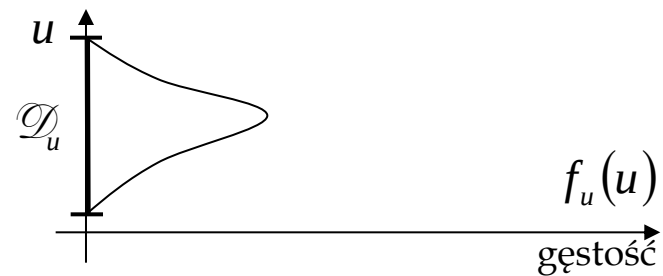
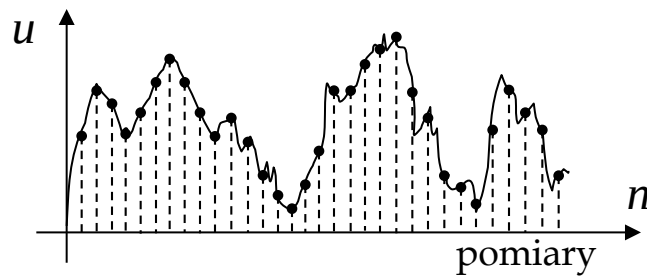
y - wyjście $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^L$

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^L, \varphi_y(y) = \bar{0}_{L_y}, \psi_y(y) \leq \bar{0}_{M_y}\}$$

z - zakłócenia $z \in \mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^L$

$$\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{R}^L, \varphi_z(z) = \bar{0}_{L_z}, \psi_z(z) \leq \bar{0}_{M_z}\}$$

Przypadek statyczny



n - krok pomiaru

Przypadek Dynamiczny



$u(t)$ - Sygnał wejściowy (*ciągły*)

$y(t)$ - Sygnał wyjściowy (*ciągły*)

u_n - Sygnał wejściowy (*dyskretny*)

y_n - Sygnał wyjściowy (*dyskretny*)

$f(t)$ - Sygnał ciągły

f_n - Sygnał dyskretny

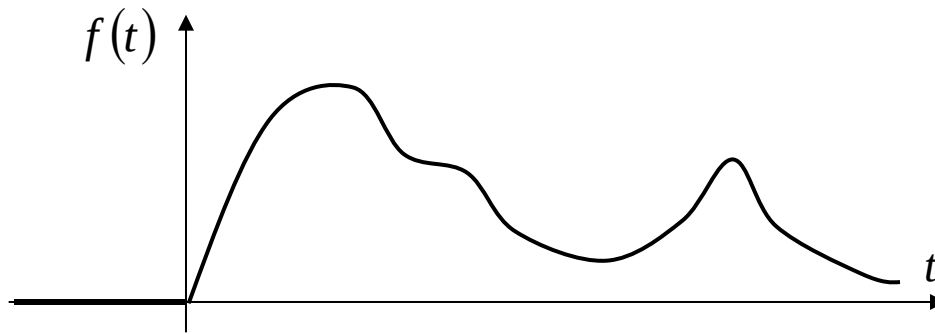
Sygnały Ciągłe



Transformta Laplace'a

Sygnały ciągłe

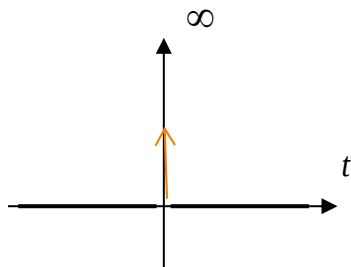
Funkcja $f(t)$, dla której $f(t) = 0$ dla $t < 0$



Często używane sygnały ciągłe

$\delta(t)$ - Delta Dirac'a

$$\delta(t) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

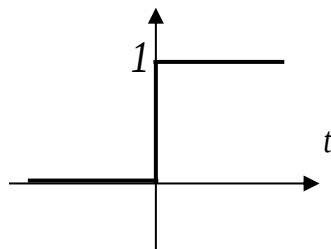


Własności: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

$\mathbf{1}(t)$ - Skok jednostkowy

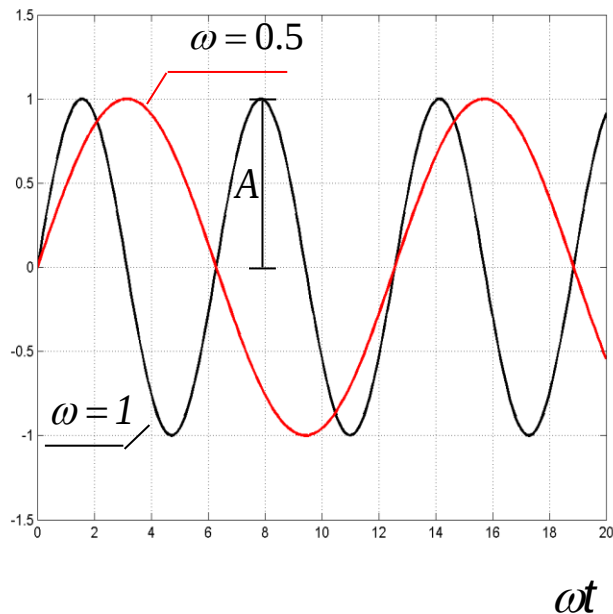
$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



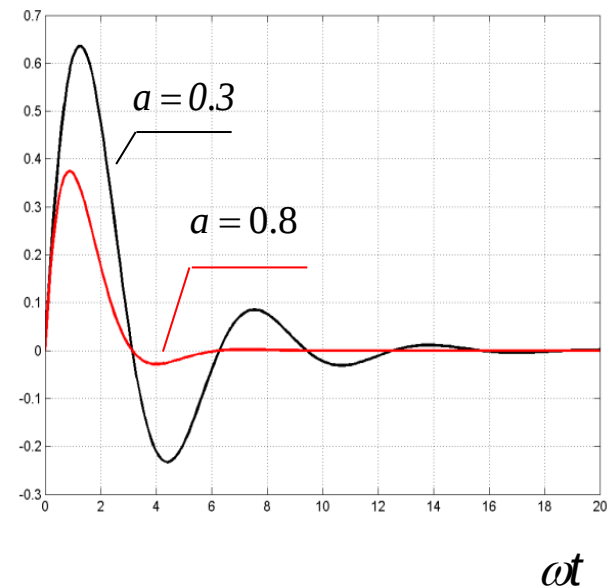
$$\frac{d}{dt} \mathbf{1}(t) = \delta(t)$$

Często używane sygnały ciągłe

$A \sin \omega t$ – sygnał sinusoidalny



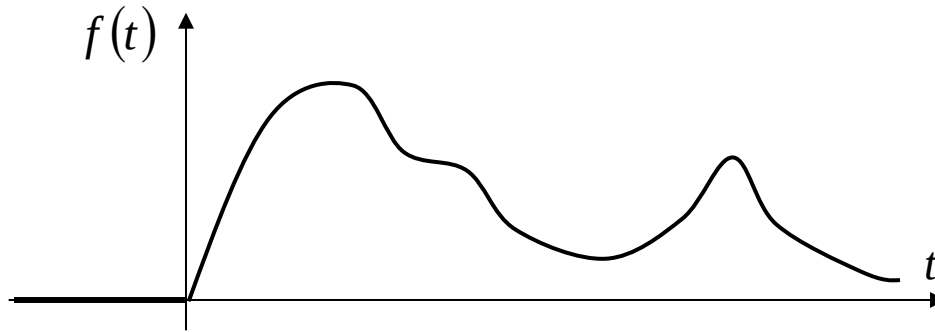
$e^{-at} \sin \omega t$ – tłumiony sygnał sinusoidalny



Transformata Laplace'a

Rozważmy funkcję $f(t)$, dla której $f(t) = 0$ dla $t < 0$

Dla każdego t , $|f(t)| < \infty$ zachodzi $\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt < \infty$



Definicja transformaty Laplace'a:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

gdzie: s - Zmienna zespolona: $s = \sigma + j\omega$

Transformata Laplace'a

Odwrotna transformata Laplace'a:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$$

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \rightarrow & F(s) \\ & \text{przekształcenia} & \downarrow \\ f'(t) & \leftarrow & F'(s) \end{array}$$

$$\delta(t) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} \delta(t-0)e^{-st}dt = e^{-s \times 0} = e^0 = 1$$

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \int_0^{\infty} \mathbf{1}(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big|_0^{\infty} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-st} \right) - \left(-\frac{1}{s}e^{-s \times 0} \right) = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

Transformata Laplace'a

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\mathbf{1}(t)t$	$\frac{1}{s^2}$
$\mathbf{1}(t)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{s^k}$
$\mathbf{1}(t)e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$\mathbf{1}(t)\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\mathbf{1}(t)\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Transformata Laplace'a

1. Liniowość:

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

Dowód:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= \int_0^{\infty} (a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} (a_1 f_1(t) e^{-st} + a_2 f_2(t) e^{-st}) dt = \\ &= \int_0^{\infty} a_1 f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} a_2 f_2(t) e^{-st} dt = a_1 \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + a_2 \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt = a_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(t)] \end{aligned}$$

Transformata Laplace'a

2. Pochodna sygnału:

a) Pierwsza pochodna

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

Dowód:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

Całkując przez części, gdzie $h(t) = e^{-st}$, $h'(t) = -se^{-st}$, otrzymujemy:

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = [f(t)h(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)h'(t)dt = [f(t)e^{-st}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-se^{-st})dt$$

Zakładając, że $\text{Re}(s) > 0$ otrzymujemy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-st} - f(0)e^{-s \cdot 0} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

Transformata Laplace'a

2. Pochodna sygnału:

b) Druga pochodna

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 \mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

Dowód:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)] &= s \mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) = s(s \mathcal{L}[f(t)] - f(0)) - f'(0) = \\ &= s^2 \mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

Transformata Laplace'a

2. Pochodna sygnału:

c) Pochodna n - tego rzędu

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Dowód:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s \mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)] - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^2 \mathcal{L}[f^{(n-2)}(t)] - f^{(n-1)}(0) - s f^{(n-2)}(0)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^3 \mathcal{L}[f^{(n-3)}(t)] - f^{(n-1)}(0) - s f^{(n-2)}(0) - s^2 f^{(n-3)}(0)$$

.....

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - f^{(n-1)}(0) - s f^{(n-2)}(0) - \dots - s^{n-2} f'(0) - s^{n-1} f(0)$$

Transformata Laplace'a

3. Transformata całki sygnału

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)]$$

Dowód:

Niech: $h(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Zauważmy, że $h(0) = 0$ oraz $h'(t) = f(t)$. Zatem:

$$\mathcal{L}[h'(t)] = s\mathcal{L}[h(t)] - h(0) = s\mathcal{L}[h(t)] \quad \text{Co daje:}$$

$$\mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[h'(t)] \quad \text{A po podstawieniu:}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)]$$

Transformata Laplace'a

4. Mnożenie funkcji przez czas - t :

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)]$$

Dowód:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)] &= -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = -\int_0^{\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} te^{-st} f(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} tf(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}[tf(t)] \end{aligned}$$

Transformata Laplace'a

5. Dzielenie funkcji przez czas t :

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)] ds$$

Dowód:

$$\begin{aligned} \int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)] ds &= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \right) ds = \int_0^\infty f(t) \left(\int_s^\infty e^{-st} ds \right) dt = \int_0^\infty f(t) \left(-\frac{1}{t} [e^{-st}]_s^\infty \right) dt = \\ &= \int_0^\infty f(t) \left(0 + \frac{1}{t} e^{-st} \right) dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] \end{aligned}$$

Transformata Laplace'a

6. Mnożenie funkcji przez e^{at} :

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s - a)$$

Dowód:

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{at-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s - a)$$

Transformata Laplace'a

7. Zmiana skali czasu:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{gdzie} \quad a > 0$$

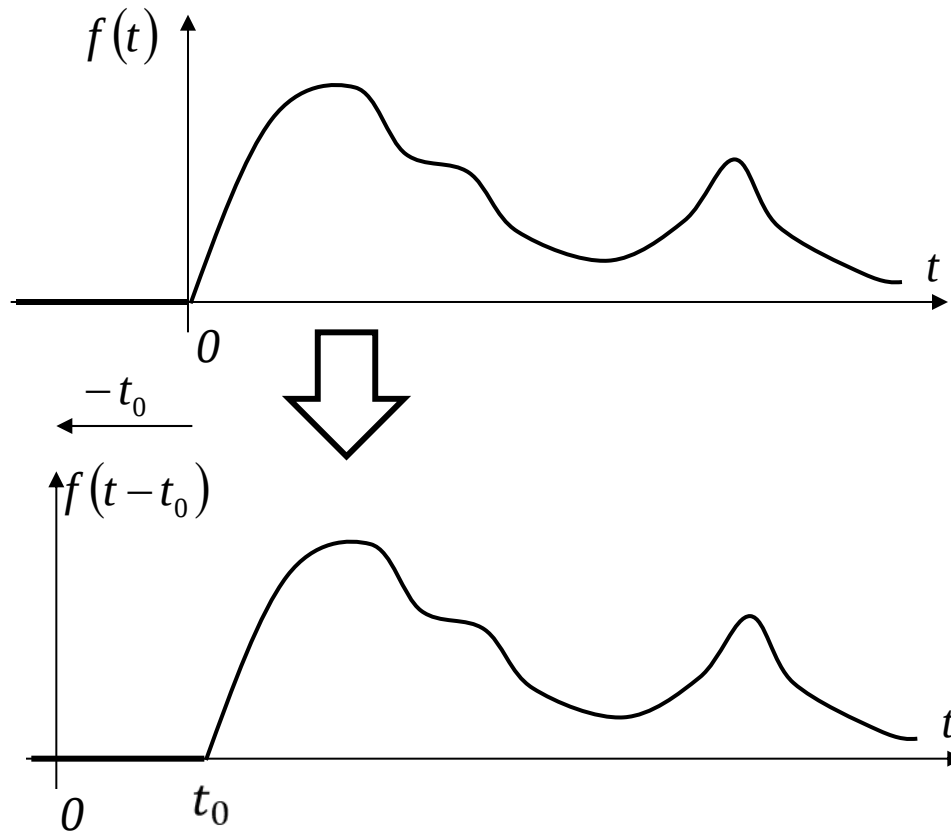
Dowód:
$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} f(at) e^{-st} dt$$

Podstawiając $x = at$ czyli $t = \frac{x}{a}$, $dt = \frac{dx}{a}$ otrzymujemy:

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-s \frac{x}{a}} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(x) e^{-\frac{s}{a} x} dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Transformata Laplace'a

8. Przesunięcie w czasie



Transformata Laplace'a

8. Przesunięcie w czasie:

$$\mathcal{L}[f(t-t_0) \cdot 1(t-t_0)] = e^{-st_0} \mathcal{L}[f(t)]$$

Dowód:

$$\mathcal{L}[f(t-t_0) \cdot 1(t-t_0)] = \int_0^{\infty} f(t-t_0) \cdot 1(t-t_0) e^{-st} dt = \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0) e^{-st} dt$$

podstawiając $\tau = t - t_0$ otrzymujemy:

$$\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s(\tau+t_0)} d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} e^{-st_0} d\tau = e^{-st_0} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} \mathcal{L}[f(t)]$$

Transformata Laplace'a

9. Splot funkcji:

$$f_1(t) * f_2(t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = \mathcal{L}[f_1(t)] \mathcal{L}[f_2(t)]$$

Dowód:

Zauważmy, że $f_1(t-\tau)\mathbf{1}(t-\tau) = 0$ dla $\tau > t$, czyli:

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f_1(t-\tau)\mathbf{1}(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

Zatem:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^{\infty} f_1(t-\tau)\mathbf{1}(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^{\infty} f_1(t-\tau)\mathbf{1}(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] dt$$

Transformata Laplace'a

Dowód cd.:

Podstawiając $t - \tau = \lambda$, $dt = d\lambda$ oraz zamieniając kolejność całkowania:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] &= \int_0^\infty f_1(t-\tau) \mathbf{1}(t-\tau) e^{-st} dt \int_0^\infty f_2(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty f_1(\lambda) e^{-s(\lambda+\tau)} d\lambda \int_0^\infty f_2(\tau) d\tau = \int_0^\infty f_1(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \int_0^\infty f_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \\ &= \mathcal{L}[f_1(t)] \mathcal{L}[f_2(t)]\end{aligned}$$

Transformata Laplace'a

$$F(s) = \frac{s^v b_v + s^{v-1} b_{v-1} + \dots + s b_1 + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m \geq v$$

s_i - i -ty pierwiastek wielomianu w mianowniku, wszystkie pierwiastki są jednokrotne,
 m - liczba różnych pierwiastków

$$F(s) = \frac{s^v b_v + s^{v-1} b_{v-1} + \dots + s b_1 + b_0}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_m)}, \quad m \geq v$$

$$F(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{(s - s_i)} = \frac{A_1}{(s - s_1)} + \frac{A_2}{(s - s_2)} + \dots + \frac{A_m}{(s - s_m)}$$

$$f(t) = 1(t) \sum_{i=1}^m A_i e^{s_i t} = 1(t) A_1 e^{s_1 t} + 1(t) A_2 e^{s_2 t} + \dots + 1(t) A_m e^{s_m t}$$

Transformata Laplace'a

$$F(s) = \frac{s^v b_v + s^{v-1} b_{v-1} + \dots + s b_1 + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m \geq v$$

$$F(s) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{(s - s_i)^j} \quad f(t) = 1(t) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{s_i t} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = m$$

s_i - i -ty pierwiastek wielomianu w mianowniku, α_i - liczba i -tych pierwiastków,
 r - liczba różnych pierwiastków

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s - s_i)^j} \right] = 1(t) \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{s_i t}$$

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \rightarrow & F(s) \\ & \text{przekształcenia} & \downarrow \\ f'(t) & \leftarrow & F'(s) \end{array}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \delta(t), \quad y(0) = 0, \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

$$s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 1 \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad y(t) = ?$$

$$\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1, s_{1,2} = \frac{-3 \mp 1}{2} = -2, -1$$

$$Y(s) = \frac{0 \times s + 1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)} = \frac{(A_1 + A_2)s + 2A_1 + A_2}{(s+1)(s+2)}$$

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0, & A_2 &= -A_1, \\ 2A_1 + A_2 &= 1, & -2A_2 + A_2 &= 1, & A_2 &= -1, & A_1 &= 1, \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \rightarrow y(t) = \mathbf{1}(t)e^{-t} - \mathbf{1}(t)e^{-2t}$$

Przypadek Dynamiczny



$u(t)$ - Sygnał wejściowy (*ciągły*)

$y(t)$ - Sygnał wyjściowy (*ciągły*)

u_n - Sygnał wejściowy (*dyskretny*)

y_n - Sygnał wyjściowy (*dyskretny*)

$f(t)$ - Sygnał ciągły

f_n - Sygnał dyskretny

Sygnały Dyskretne

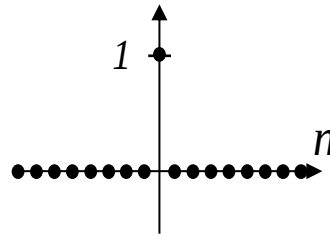


Transformata $\mathcal{Z}$

Często spotykane sygnały dyskretne

δ_n - Delta Kroneckera

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

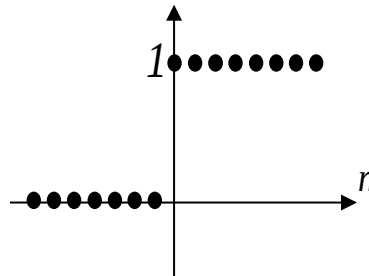


Własność:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n-k} a_{n-k} = a_k$$

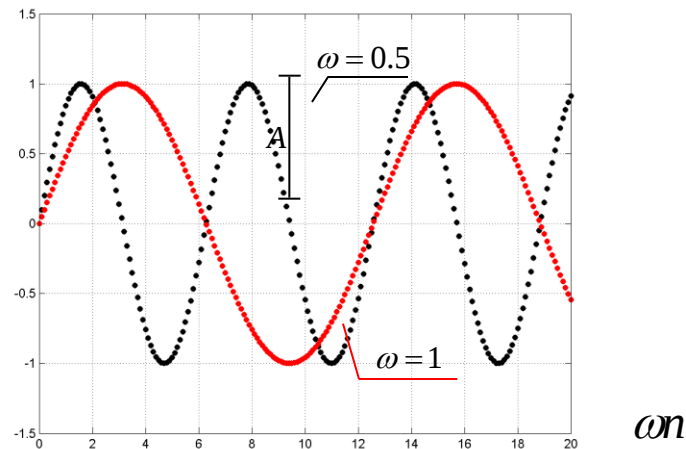
$\mathbf{1}_n$ - Dyskretny skok jednostkowy

$$\mathbf{1}_n = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



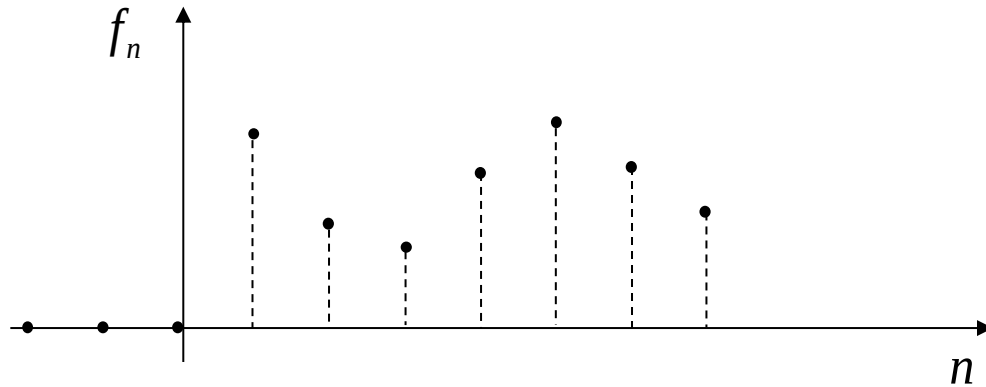
Frequently used discrete signals (2)

$A \sin \omega n$ - Dyskretny sygnał sinusoidalny



Transformata $\mathcal{Z}$

Rozważmy ciąg liczbowy f_n dla którego $f_n = 0$ dla $n < 0$



Dla każdego n , $|f_n| < \infty$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n z^{-n}| = 0$

z - zmienna zespolona : $z = \sigma + j\omega$

Transformata $\mathcal{Z}$

Definicja transformaty $\mathcal{Z}$:

$$F(z) = \mathcal{Z}[f_n] \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

Odwrotna transformata $\mathcal{Z}$:

$$f_n = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(z) z^{n-1} dz$$

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\{\delta_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^{-n} = 1z^{-0} + 0 \times z^{-1} + 0 \times z^{-2} + \dots = 1$$

$$\mathbf{1}_n = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{1}_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_n z^{-n} = 1z^{-0} + 1 \times z^{-1} + 1 \times z^{-2} + \dots =$$

$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Suma ciągu geometrycznego

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}, \quad a_0 = 1, \quad q = z^{-1}$$

Transformata $\mathcal{Z}$

f_n	$F(z)$
δ_n	1
$\mathbf{1}_n$	$\frac{z}{z-1}$
$\mathbf{1}_n \cdot n$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\mathbf{1}_n \cdot n^2$	$\frac{z^2 + z}{(z-1)^2}$
$\mathbf{1}_n \cdot a^n$	$\frac{z}{z-a}$
$\mathbf{1}_n \cdot \sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$\mathbf{1}_n \cdot \cos \omega n$	$\frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$

Transformata $\mathcal{Z}$

$$\begin{array}{ccc} f_n & \rightarrow & F(z) \\ & \text{przekształcenia} & \downarrow \\ f'_n & \leftarrow & F'(z) \end{array}$$

Transformata $\mathcal{Z}$

1. Liniowość:

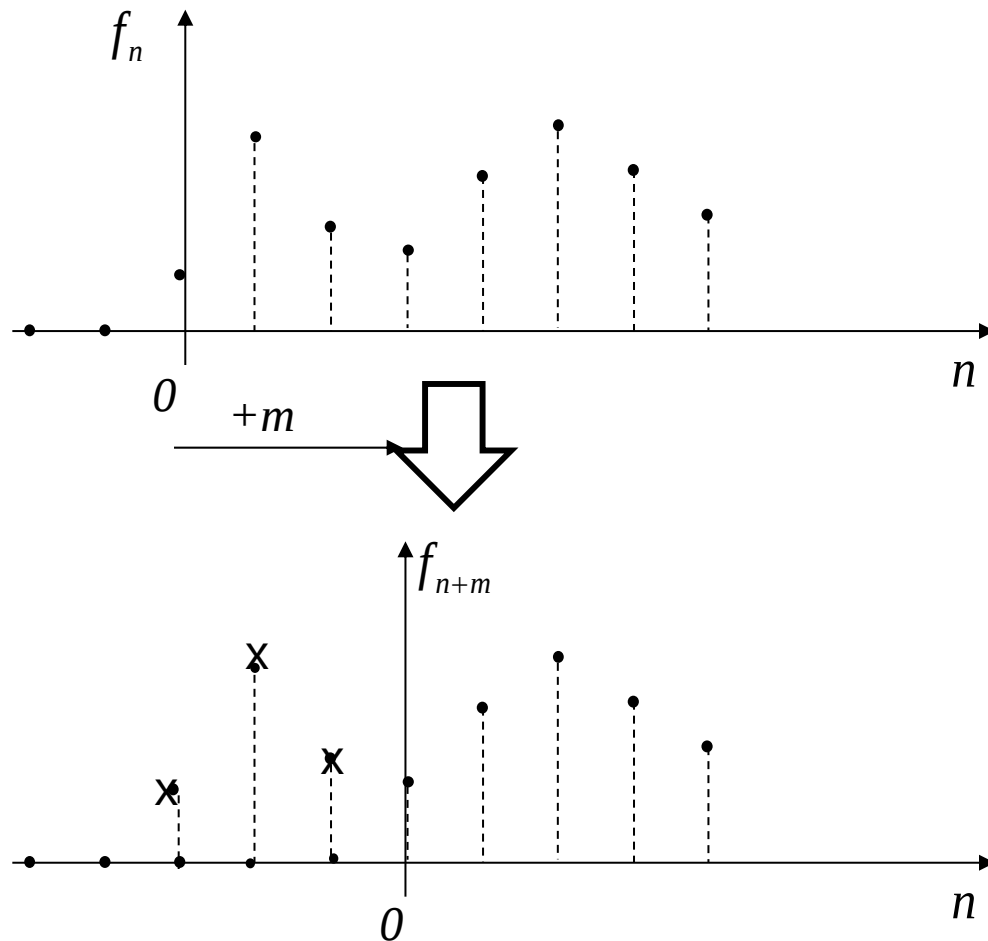
$$\mathcal{Z}[af_n + bg_n] = a\mathcal{Z}[f_n] + b\mathcal{Z}[g_n]$$

Dowód:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[af_n + bg_n] &= \sum_{n=0}^{\infty} (af_n + bg_n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (af_n z^{-n} + bg_n z^{-n}) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} af_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} bg_n z^{-n} = a \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} + b \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} = a\mathcal{Z}[f_n] + b\mathcal{Z}[g_n]\end{aligned}$$

Transformata $\mathcal{Z}$

2. Przesunięcie wprzód



Transformata $\mathcal{Z}$

2. Przesunięcie wprzód :

$$\mathcal{Z}[f_{n+m}] = z^m \left[\mathcal{Z}[f_n] - \sum_{k=0}^{m-1} f_k z^{-k} \right]$$

Dowód:

Dla $m = 1$: $\mathcal{Z}[f_{n+1}] = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{-n}$ Niech $j = n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{-n} &= \sum_{j=1}^{\infty} f_j z^{-j+1} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j z^{-j} z = z \sum_{j=1}^{\infty} f_j z^{-j} = \\ &= z \left[\sum_{j=0}^{\infty} f_j z^{-j} - f_0 z^0 \right] = z [\mathcal{Z}[f_n] - f_0] \end{aligned}$$

Transformata $\mathcal{Z}$

2. Przesunięcie wprzód:

$$\mathcal{Z}[f_{n+m}] = z^m \left[\mathcal{Z}[f_n] - \sum_{k=0}^{m-1} f_k z^{-k} \right]$$

Dowód:

Dla $m = 2$: $\mathcal{Z}[f_{n+2}] = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{-n}$ Niech $j = n + 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{-n} &= \sum_{j=2}^{\infty} f_j z^{-j+2} = \sum_{j=2}^{\infty} f_j z^{-j} z^2 = z^2 \sum_{j=2}^{\infty} f_j z^{-j} = \\ &= z^2 \left[\sum_{j=0}^{\infty} f_j z^{-j} - f_0 z^0 - f_1 z^{-1} \right] = z^2 \left[\mathcal{Z}[f_n] - f_0 - f_1 z^{-1} \right] \end{aligned}$$

Transformata $\mathcal{Z}$

2. Przesunięcie wprzód:

$$\mathcal{Z}[f_{n+m}] = z^m \left[\mathcal{Z}[f_n] - \sum_{k=0}^{m-1} f_k z^{-k} \right]$$

Dowód:

$$\mathcal{Z}[f_{n+1}] = z[\mathcal{Z}[f_n] - f_0]$$

$$\mathcal{Z}[f_{n+2}] = z^2[\mathcal{Z}[f_n] - f_0 - f_1 z^{-1}]$$

$$\mathcal{Z}[f_{n+3}] = z^3[\mathcal{Z}[f_n] - f_0 - f_1 z^{-1} - f_2 z^{-2}]$$

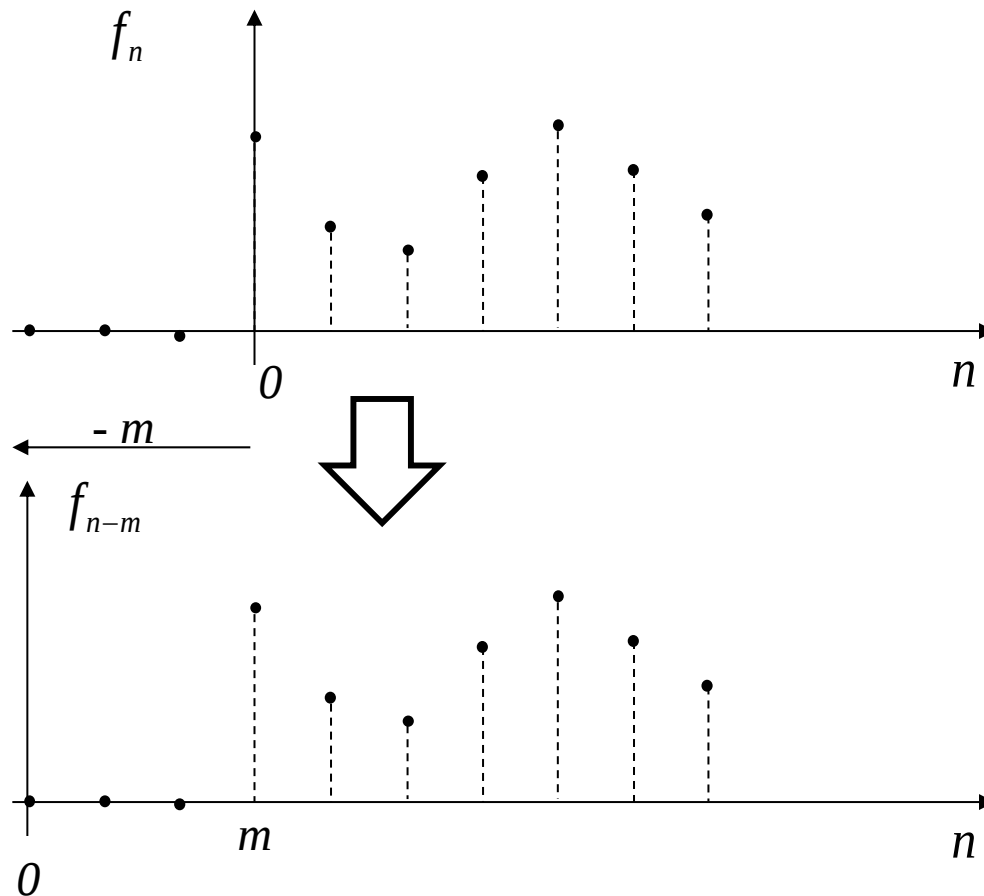
.....

$$\mathcal{Z}[f_{n+m}] = z^m [\mathcal{Z}[f_n] - f_0 - f_1 z^{-1} - f_2 z^{-2} - \dots - f_{m-1} z^{-(m-1)}] =$$

$$= z^m \left[\mathcal{Z}[f_n] - \sum_{k=0}^{m-1} f_k z^{-k} \right]$$

Transformata $\mathcal{Z}$

3. Przesunięcie wstecz



Transformata $\mathcal{Z}$

3. Przesunięcie wstecz:

$$\mathcal{Z}[f_{n-m}] = z^{-m} \mathcal{Z}[f_n]$$

Dowód:

Dla $m=1$: $\mathcal{Z}[f_{n-1}] = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-1} z^{-n}$ Niech $j = n-1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n-1} z^{-n} = \sum_{j=-1}^{\infty} f_j z^{-j-1} = \sum_{j=-1}^{\infty} f_j z^{-j} z^{-1} = z^{-1} \sum_{j=-1}^{\infty} f_j z^{-j}$$

Ponieważ $f_j = 0$ dla $j < 0$, otrzymujemy:

$$z^{-1} \sum_{j=-1}^{\infty} f_j z^{-j} = z^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^{-j} = z^{-1} \mathcal{Z}[f_n]$$

Transformata $\mathcal{Z}$

3. Przesunięcie wstecz:

$$\mathcal{Z}[f_{n-m}] = z^{-m} \mathcal{Z}[f_n]$$

Dowód:

Dla $m = 2$: $\mathcal{Z}[f_{n-2}] = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-2} z^{-n}$ Niech $j = n - 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n-2} z^{-n} = \sum_{j=-2}^{\infty} f_j z^{-j-2} = \sum_{j=-2}^{\infty} f_j z^{-j} z^{-2} = z^{-2} \sum_{j=-2}^{\infty} f_j z^{-j}$$

Ponieważ $f_j = 0$ dla $j < 0$, otrzymujemy:

$$z^{-2} \sum_{j=-2}^{\infty} f_j z^{-j} = z^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^{-j} = z^{-2} \mathcal{Z}[f_n]$$

Transformata $\mathcal{Z}$

3. Przesunięcie wstecz:

$$\mathcal{Z}[f_{n-m}] = z^{-m} \mathcal{Z}[f_n]$$

Dowód:

$$\mathcal{Z}[f_{n-1}] = z^{-1} \mathcal{Z}[f_n]$$

$$\mathcal{Z}[f_{n-2}] = z^{-2} \mathcal{Z}[f_n]$$

.....

$$\mathcal{Z}[f_{n-m}] = z^{-m} \mathcal{Z}[f_n]$$

Transformata $\mathcal{Z}$

4. Mnożenie przez n :

$$\mathcal{Z}[nf_n] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[f_n]$$

Dowód:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[nf_n] &= \sum_{n=0}^{\infty} nf_n z^{-n} = z \sum_{n=0}^{\infty} nf_n z^{-n-1} = -z \sum_{n=0}^{\infty} f_n (-nz^{-n-1}) = \\ &= -z \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{d}{dz} (z^{-n}) = -z \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[f_n] \end{aligned}$$

Transformata $\mathcal{Z}$

5. Mnożenie przez a^{-n} :

$$\mathcal{Z}\left[a^{-n} f_n\right] = F(az)$$

Dowód:

$$\mathcal{Z}\left[a^{-n} f_n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \times (az)^{-n} = F(az)$$

Transformata $\mathcal{Z}$

6. Transformata spłotu $f_n * g_n \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k}$

$$\mathcal{Z} \left[\sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} \right] = \mathcal{Z}[f_n] \mathcal{Z}[g_n]$$

Dowód:

$$\mathcal{Z} \left[\sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} \right) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k g_{n-k} \right) z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_k g_{n-k} z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sum_{n=0}^{\infty} g_{n-k} z^{-n}$$

Niech $r = n - k$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \sum_{n=0}^{\infty} g_{n-k} z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sum_{n=0}^{\infty} g_r z^{-r-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} g_r z^{-r} = \mathcal{Z}[f_n] \mathcal{Z}[g_n]$$

Transformata $\mathcal{Z}$

$$F(z) = \frac{z^v b_v + z^{v-1} b_{v-1} + \dots + z b_1 + b_0}{z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad m \geq v$$

s_i - i -th pierwiastek $i=1, 2, \dots, m$

m - liczba pierwiastków

$$F(z) = \frac{z^v b_v + z^{v-1} b_{v-1} + \dots + z b_1 + b_0}{(z - s_1)(z - s_2) \dots (z - s_m)}, \quad m \geq v$$

$$F(z) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i z}{(z - s_i)} = \frac{A_1 z}{(z - s_1)} + \frac{A_2 z}{(z - s_2)} + \dots + \frac{A_m z}{(z - s_m)}$$

$$f_n = \sum_{i=1}^m 1_n A_i s_i^n = 1_n A_1 s_1^n + 1_n A_2 s_2^n + \dots + 1_n s_m^n A_m$$

Transformata $\mathcal{Z}$

$$X(z) = \frac{1}{(z+1)(3z+1)}, \quad x_n = ???$$

$$X(z) = \frac{0z+1}{(z+1)(3z+1)} = \frac{A_1}{(z+1)} + \frac{A_2}{(3z+1)} = \frac{3A_1z + A_1 + A_2 + A_2z}{(z+1)(3z+1)}$$

$$3A_1z + A_2z = 0, \quad A_1 + A_2 = 1$$

$$A_2 = -3A_1 \quad A_1 + -3A_1 = 1 \rightarrow A_1 = -\frac{1}{2}, A_2 = \frac{3}{2},$$

$$X(z) = \frac{-\frac{1}{2}}{(z+1)} + \frac{\frac{3}{2}}{(3z+1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{(z+1)} + \frac{\frac{3}{2}}{(3z+1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z} \frac{z}{(z+1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{z} \frac{z}{\left(z + \frac{1}{3}\right)}$$

$$x_n = \mathbf{1}_{n-1} \left[-\frac{1}{2} (-1)^{n-1} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right]$$

Transformata $\mathcal{Z}$

$$X(z) = \frac{4z + 1}{z^2(3z - 1)} \quad x_n = ?$$

$$X(z) = \frac{4z + 1}{z^2(3z - 1)} = \frac{4}{3} \frac{z}{z^2 \left(z - \frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{3} \frac{1}{z^2 \left(z - \frac{1}{3}\right)} = \frac{4}{3} \frac{z}{z^2 \left(z - \frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{3} \frac{z}{z^3 \left(z - \frac{1}{3}\right)} =$$

$$x_n = \frac{4}{3} \mathbf{1}_{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3} \mathbf{1}_{n-3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$$

Dziękuję za uwagę

