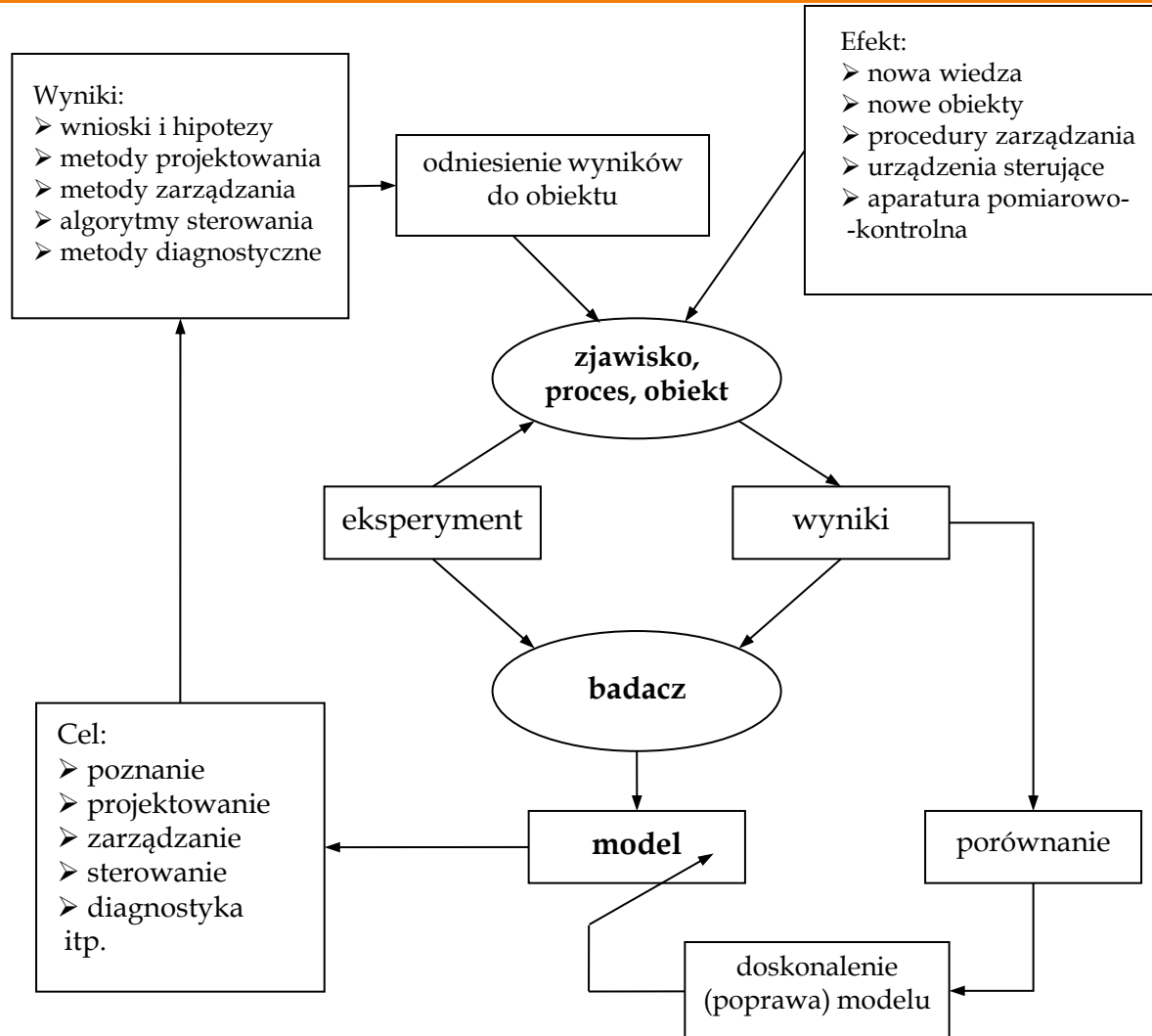


Modele systemów dynamicznych

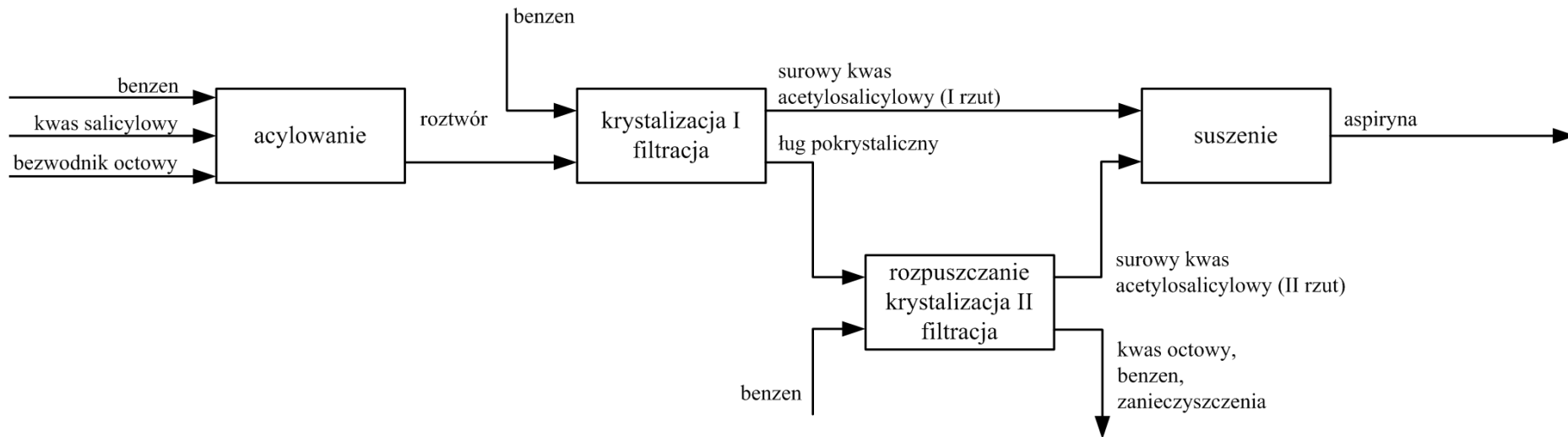


Wykład 3. Typowe opisy obiektów

Model w badaniach systemowych

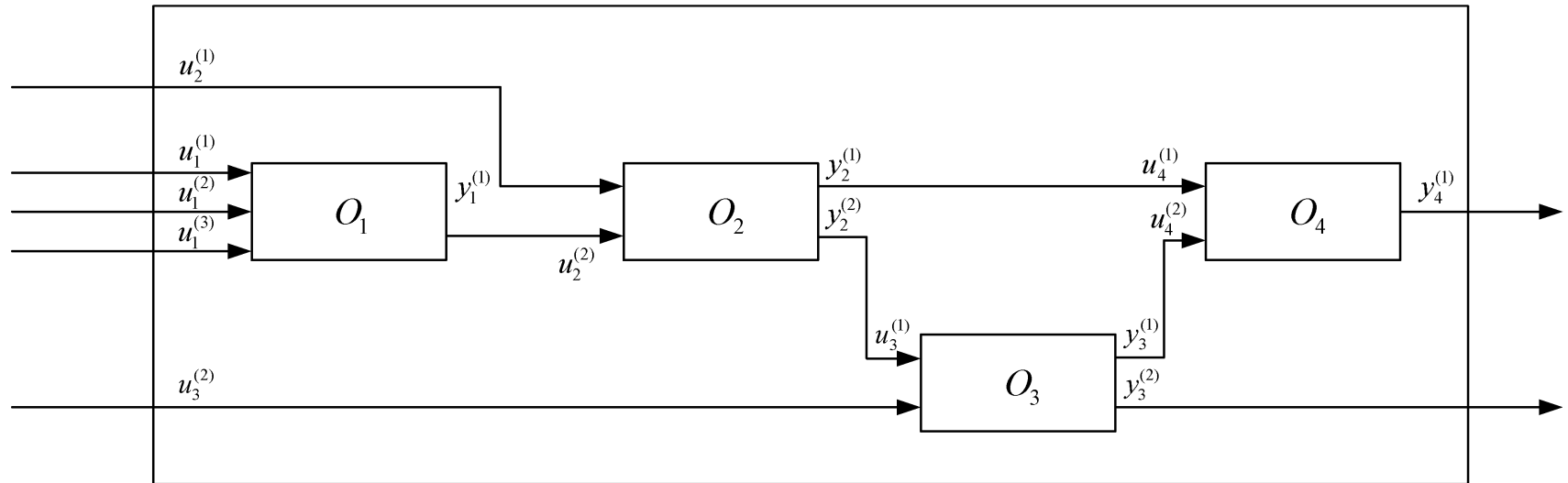


Elementy (komponenty) systemu - działające części



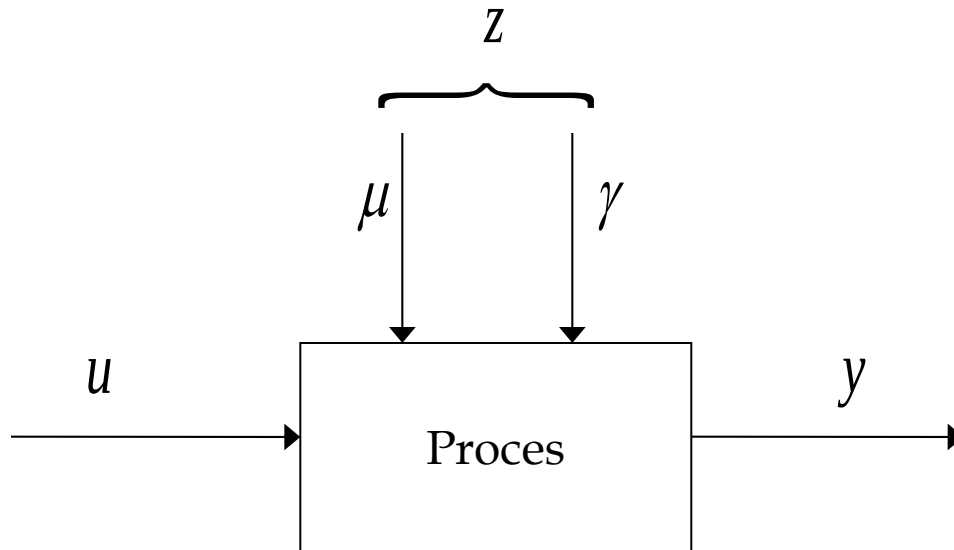
System produkcji aspiryny

Elementy (komponenty) systemu - działające części



Przykład systemu złożonego – produkcja aspiryny

Typowe opisy procesów



u – wejście

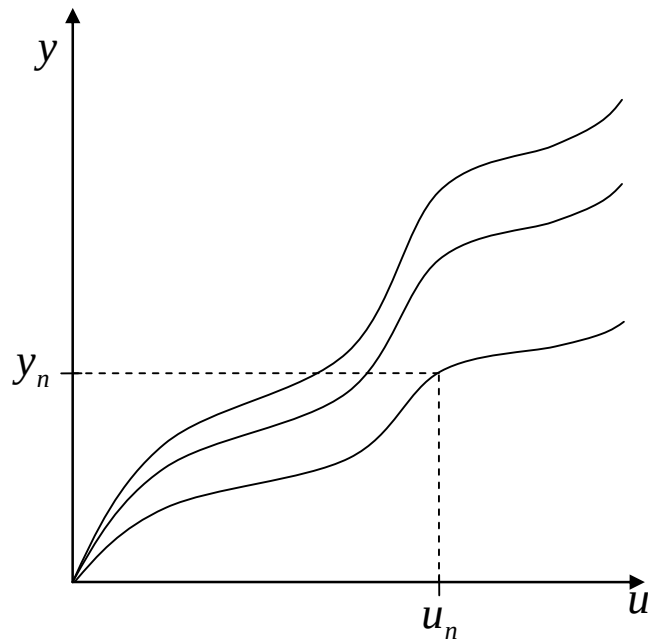
y – wyjście

μ – zakłócenia mierzalne

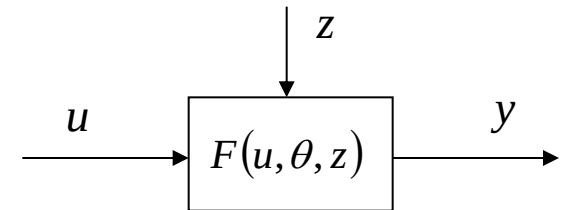
γ – zakłócenia niemierzalne

Typowe opisy charakterystyka statyczna

$$y = F(u, \theta, z)$$



$$y = F(u, \theta, z); \quad z = z_n$$



where:

u – wejście, $u \in U$

y – wyjście, $y \in Y$

z – zakłócenia, $z \in Z$

θ – parametry, $\theta \in \Theta$

Obiekt dynamiczny ciągły



$u(t)$ - Sygnał wejściowy (*ciągły*)

$y(t)$ - Sygnał wyjściowy (*ciągły*)

$x(t)$ - Stan obiektu (*ciągły*)

Typowe opisy zmienne stanu – równania stanu

Przypadek ciągły:

Wektor stanu: $x(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(K)}(t) \end{bmatrix}$

Równania stanu:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), u(t)), \quad x(t_0)$$
$$y(t) = G(x(t), u(t))$$

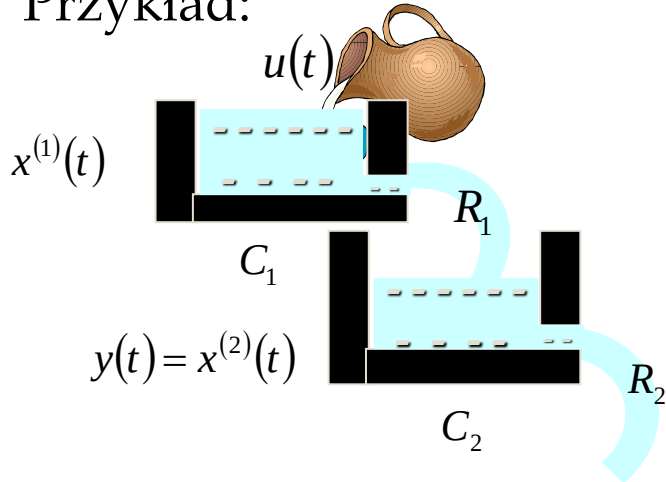
Warunki początkowe:

Przypadek liniowy:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Typowe opisy zmienne stanu

Przykład:



$$\begin{aligned} \Delta x^{(1)}(t) &= \frac{u(t)}{C_1} \Delta t - \frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_1} \Delta t \\ \Delta x^{(2)}(t) &= \frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_2} \Delta t - \frac{x^{(2)}(t)R_2}{C_2} \Delta t \end{aligned} \quad \Bigg| : \Delta t$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x^{(1)}(t)}{\Delta t} &= \frac{u(t)}{C_1} - \frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_1} \\ \frac{\Delta x^{(2)}(t)}{\Delta t} &= \frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_2} - \frac{x^{(2)}(t)R_2}{C_2} \end{aligned} \quad \Bigg| \lim_{t \leftrightarrow \infty} \Delta t = 0$$

Równania stanu:

where

C_1, C_2 - powierzchnia zbiornika

R_1, R_2 - odwrotność oporu przepływu

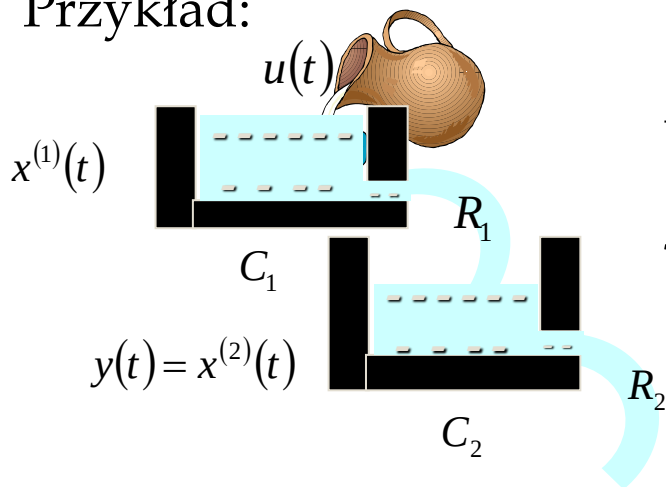
$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = -\frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_1} + \frac{u(t)}{C_1}$$

$$\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} = \frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_2} - \frac{x^{(2)}(t)R_2}{C_2}$$

$$y(t) = x^{(2)}(t)$$

Typowe opisy zmienne stanu

Przykład:



where:

C_1, C_2 - powierzchnia zbiornika

R_1, R_2 - odwrotność oporu przepływu

Ogólna postać równań stanu:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{C_1} & 0 \\ \frac{R_1}{C_2} & -\frac{R_2}{C_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t) \quad C = [0 \quad 1]$$

Równania stanu:

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = -\frac{R_1}{C_1} x^{(1)}(t) + \frac{1}{C_1} u(t)$$

$$\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} = \frac{R_1}{C_2} x^{(1)}(t) - \frac{R_2}{C_2} x^{(2)}(t)$$

$$y(t) = x^{(2)}(t)$$

Typowe opisy zmienne stanu – równania stanu

Przypadek ciągły:

Wektor stanu: $x(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(K)}(t) \end{bmatrix}$

Równania stanu:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), u(t)), \quad x(t_0)$$
$$y(t) = G(x(t), u(t))$$

Warunki początkowe:

Przypadek liniowy:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Obiekt dynamiczny ciągły



$u(t)$ - Sygnał wejściowy (*ciągły*)

$y(t)$ - Sygnał wyjściowy (*ciągły*)

Typowe opisy równania różniczkowe

Równanie różniczkowe:

$$F\left(\frac{d^m y(t)}{dt^m}, \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t); \frac{d^v u(t)}{dt^v}, \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}}, \dots, \frac{du(t)}{dt}, u(t)\right) = 0 \quad \text{Warunki początkowe}$$

Liniowe równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} \frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= \\ = b_v \frac{d^v u(t)}{dt^v} + b_{v-1} \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} m \geq v \\ \text{Warunki początkowe} \end{array}$$

Typowe opisy zmienne stanu

Równania stanu:

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = -\frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_1} + \frac{u(t)}{C_1} \quad (1)$$

$$\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} = \frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_2} - \frac{x^{(2)}(t)R_2}{C_2} \quad (2)$$

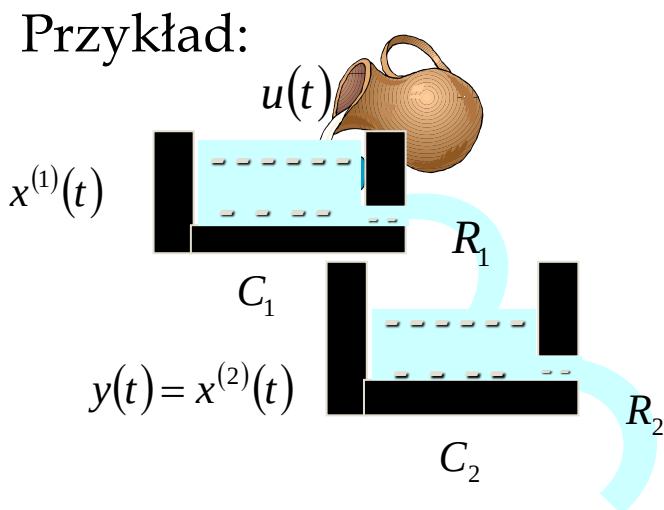
$$y(t) = x^{(2)}(t) \quad (3)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{R_1}{C_2}x^{(1)}(t) - \frac{R_2}{C_2}y(t) \quad (2)$$

$$\frac{R_1}{C_2}x^{(1)}(t) = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_2}{C_2}y(t) \quad (2) \quad \Bigg| \times \frac{C_2}{R_1}$$

$$x^{(1)}(t) = \frac{C_2}{R_1} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = \frac{C_2}{R_1} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1} \frac{dy(t)}{dt} \quad (2)$$



where

C_1, C_2 - powierzchnia zbiornika

R_1, R_2 - odwrotność oporu przepływu

$$\frac{C_2}{R_1} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1} \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{R_1}{C_1} \left(\frac{C_2}{R_1} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{u(t)}{C_1} \quad (1)$$

$$\frac{C_2}{R_1} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1} \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{R_1}{C_1} \left(\frac{C_2}{R_1} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{u(t)}{C_1} \quad (1) \quad / \times \frac{R_1}{C_2}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{C_2} \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{R_1}{C_1} \left(\frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_2}{C_2} y(t) \right) + \frac{R_1}{C_1 C_2} u(t) \quad (1)$$

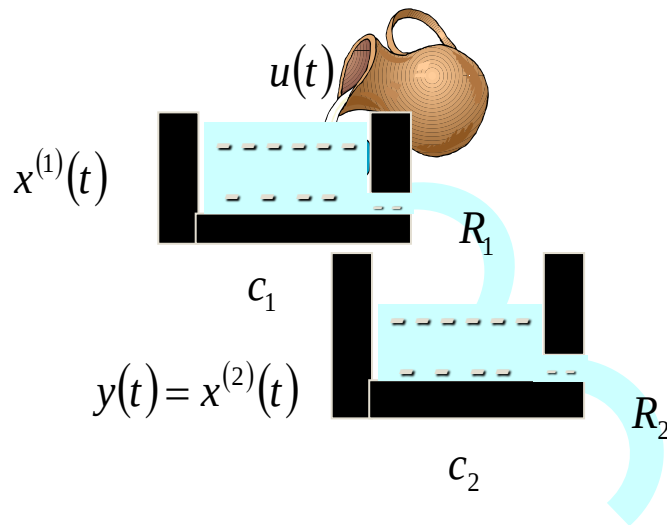
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{C_2} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_1}{C_1} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_1 R_2}{C_1 C_2} y(t) = \frac{R_1}{C_1 C_2} u(t) \quad (1)$$

Typowe opisy

Równania różniczkowe

Przykład:

Linowe równanie różniczkowe dla danego przykładu:



$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_2}{C_2} + \frac{R_1}{C_1} \right) \frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_1 R_2}{C_1 C_2} y(t) = \frac{R_1}{C_1 C_2} u(t)$$

gdzie:

C_1, C_2 - powierzchnia zbiorników

R_1, R_2 - odwrotność oporu przepływu

Typowe opisy równania różniczkowe

Równanie różniczkowe:

$$F\left(\frac{d^m y(t)}{dt^m}, \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t); \frac{d^v u(t)}{dt^v}, \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}}, \dots, \frac{du(t)}{dt}, u(t)\right) = 0 \quad \text{Warunki początkowe}$$

Liniowe równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} \frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= \\ = b_v \frac{d^v u(t)}{dt^v} + b_{v-1} \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} m \geq v \\ \text{Warunki początkowe} \end{array}$$

Obiekt dynamiczny ciągły



$u(t)$ $U(s)$ - Sygnał wejściowy (*ciągły*)

$y(t)$ $Y(s)$ - Sygnał wyjściowy (*ciągły*)

Typowe opisy transmitancja

Transmitancja: $K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ $K(s) = \frac{b_v s^v + b_{v-1} s^{v-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m \geq v$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \right] = \mathcal{L} \left[b_v \frac{d^v u(t)}{dt^v} + b_{v-1} \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + a_0 u(t) \right]$$

Zerowe warunki początkowe

$$Y(s) (s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0) = U(s) (b_v s^v + b_{v-1} s^{v-1} + \dots + b_1 s + b_0)$$

Typowe opisy transmitancja

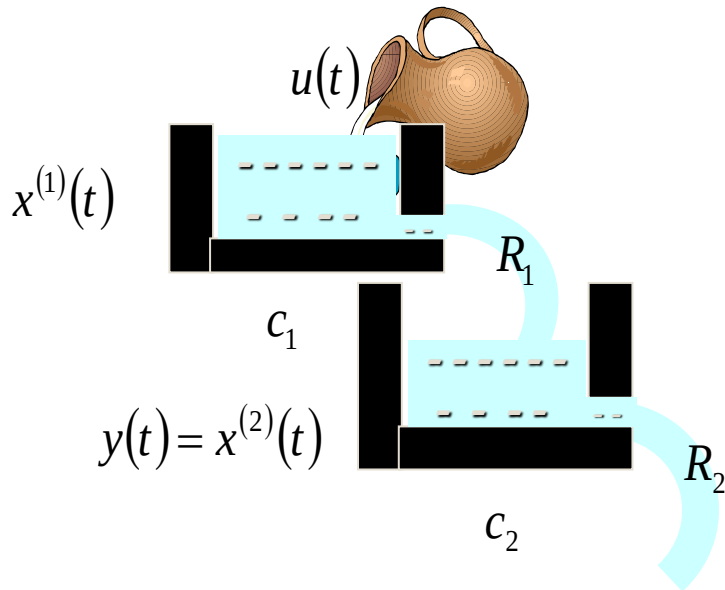
Przykład:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_2}{C_2} + \frac{R_1}{C_1} \right) \frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_1 R_2}{C_1 C_2} y(t) = \frac{R_1}{C_1 C_2} u(t)$$

$$s^2 Y(s) + s \left(\frac{R_1}{C_1} + \frac{R_2}{C_2} \right) Y(s) + \frac{R_1 R_2}{C_1 C_2} Y(s) = \frac{R_1}{C_1 C_2} U(s)$$

Transmitancja:

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{R_1}{C_1 C_2}}{s^2 + \left(\frac{R_2}{C_2} + \frac{R_1}{C_1} \right) s + \frac{R_1 R_2}{C_1 C_2}}$$



$$K(s) = \frac{\frac{1}{R_2}}{\left(\frac{C_1}{R_1} s + 1 \right) \left(\frac{C_2}{R_2} s + 1 \right)} = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

gdzie: $k = \frac{1}{R_2}$ - współczynnik wzmocnienia,

$T_1 = \frac{C_1}{R_1}, T_2 = \frac{C_2}{R_2}$ - stałe czasowe

Typowe opisy odpowieź impulsowa

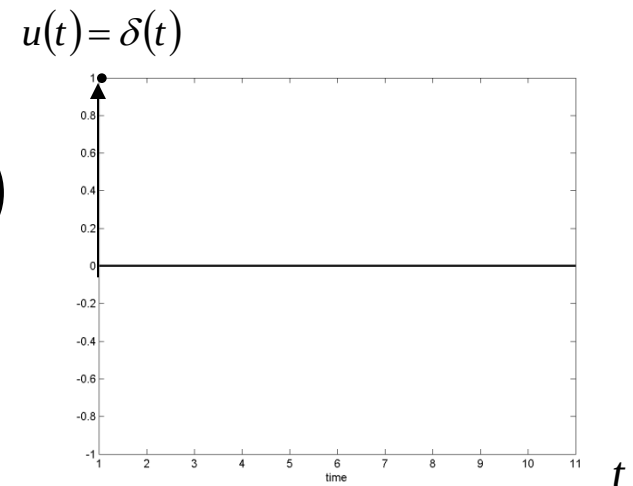
Odpowiedź impulsowa

Transmitancja: $K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

gdzie: $Y(s) = K(s)U(s)$

$$U(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

oraz: $\delta(t)$ delta Dirac'a.



Odpowiedź impulsowa: $k_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)]$

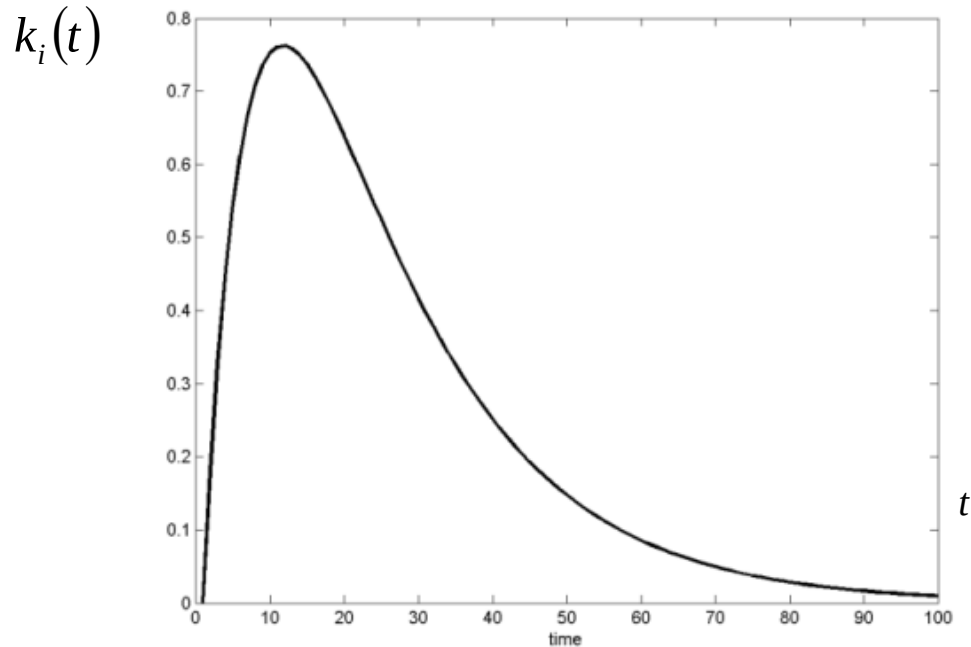
Delta Dirac'a

Typowe opisy odpowieź impulsowa

Przykład:

Odpowiedź impulsowa:

$$k_i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \right] = k \left(\frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}) \right) \mathbf{1}(t) \quad T_1 \neq T_2$$



Typowe opisy odpowieź na skok jednostkowy

Odpowiedź na skok jednostkowy

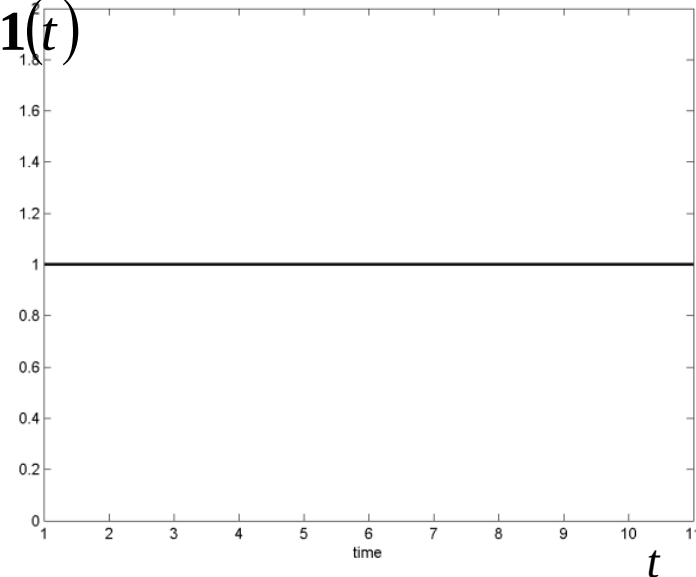
Transmitancja: $K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ $u(t) = \mathbf{1}(t)$

$$Y(s) = K(s)U(s)$$

gdzie:

$$U(s) = \mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}$$

oraz: $\mathbf{1}(t)$ jest skokiem jednostkowym.



Skok jednostkowy

Odpowiedź na skok
jednostkowy:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K(s)}{s}\right]$$

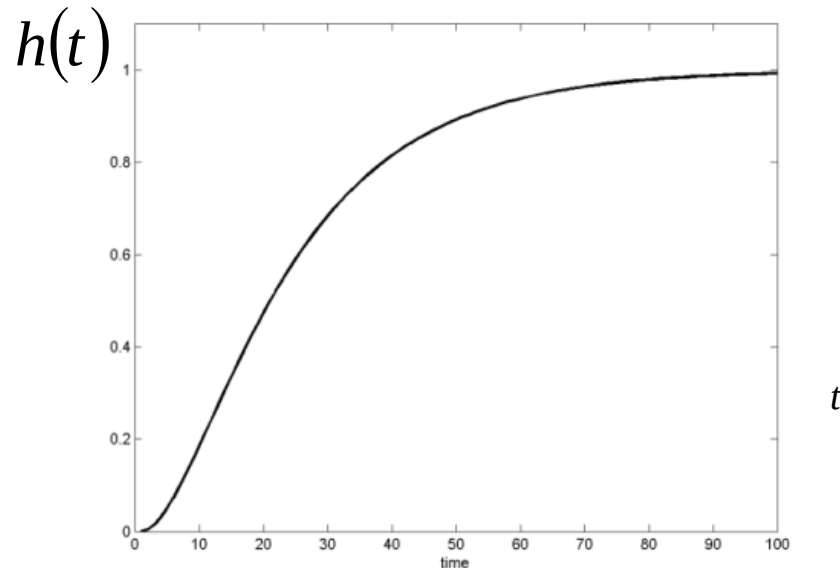
Typowe opisy

odpowieź na skok jednostkowy

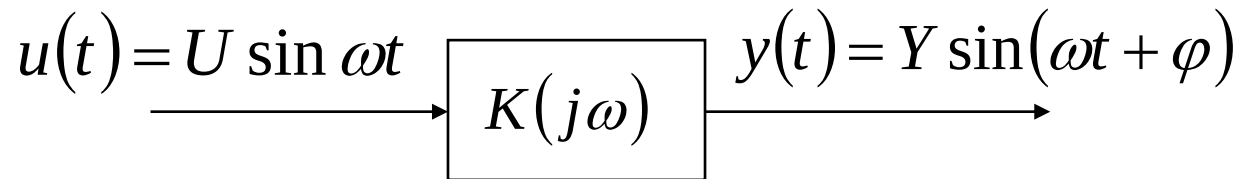
Przykład:

Odpowiedź na skok jednostkowy:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \frac{1}{s} \right] = k \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) \mathbf{1}(t) \quad T_1 \neq T_2$$



Transmitancja widmowa – charakterystyki częstotliwościowe



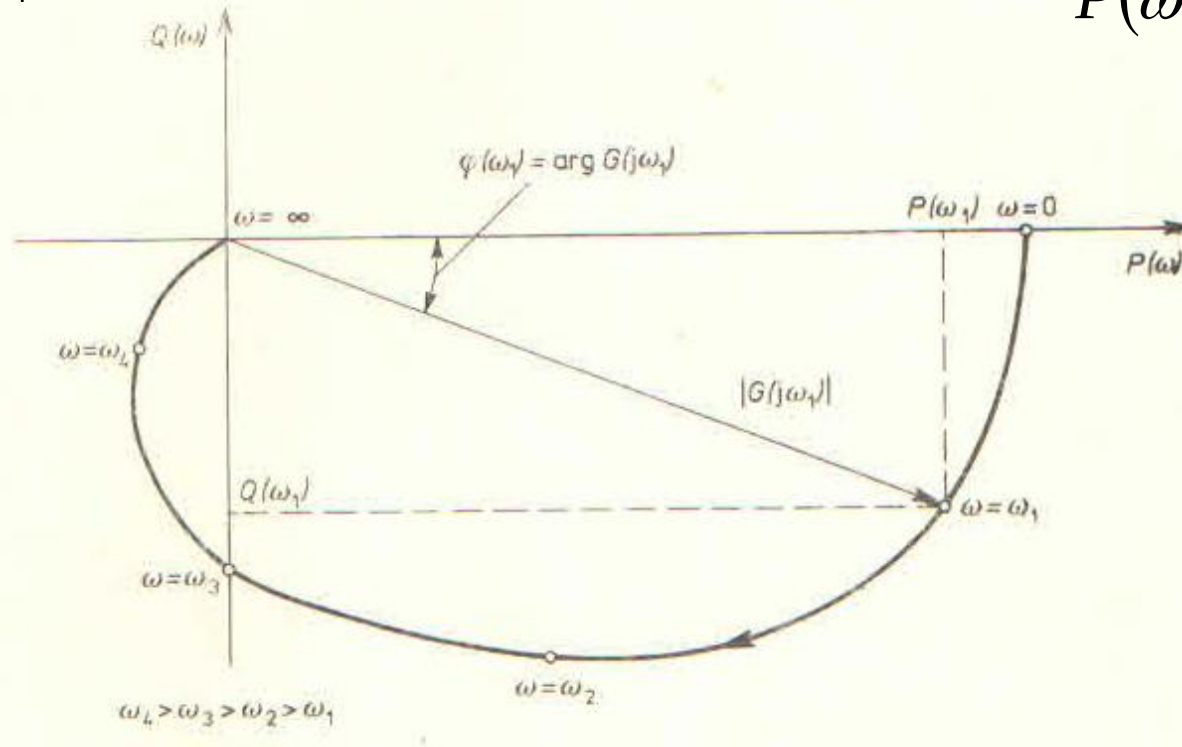
$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = K(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$K(j\omega) = \operatorname{Re}[K(j\omega)] + j \operatorname{Im}[K(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$|K(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

$$K(j\omega) = \operatorname{Re}[K(j\omega)] + j \operatorname{Im}[K(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$|K(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$



Obiekt dynamiczny dyskretny



u_n - Sygnał wejściowy(*dyskretny*)

y_n - Sygnał wyjściowy(*dyskretny*)

x_n - Stan obiektu (*dyskretny*)

Typowe opisy

zmienne stanu – równania stanu

Przypadek dyskretny:

Wektor stanu: $x_n = \begin{bmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(K)} \end{bmatrix}$

Przykład:



$$x_{n+1} = (x_n + u_n) \bmod 2$$

$$y_n = x_n$$

$$x_n \in \{0,1\}, \quad u_n \in \{0,1\}$$

<http://www.freeclipartisland.com/>

Równania stanu:

$$x_{n+1} = F(x_n, u_n)$$

$$y_n = G(x_n, u_n)$$



$$x_{n+1} = x_n + \alpha \cdot x_n + u_n$$

$$y_n = x_n$$

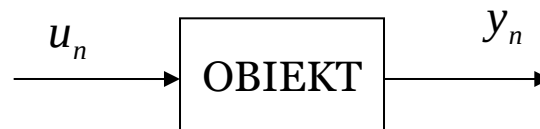
gdzie:

α - stopa procentowa

Rachunek bankowy

<http://www.freeclipartisland.com/>

Obiekt dynamiczny dyskretny



u_n - Sygnał wejściowy(*dyskretny*)

y_n - Sygnał wyjściowy(*dyskretny*)

Typowe opisy równania różnicowe

Równanie różnicowe:

$$F(y_{n+m}, y_{n+m-1}, \dots, y_n; u_{n+v}, u_{n+v-1}, \dots, u_n) = 0 \quad m \geq v$$

Liniowe równane różnicowe:

$$y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + \dots + a_0y_n = b_v u_{n+v} + b_{v-1}u_{n+v-1} + \dots + b_0u_n$$

Przykład:



$$y_{n+1} = (y_n + u_n) \bmod 2$$

$$y_n \in \{0,1\}, \quad u_n \in \{0,1\}$$



$$y_{n+1} = (1 + \alpha)y_n + u_n$$

Rachunek bankowy

Różnica

$$\Delta_n^1 = x_{n+1} - x_n$$

$$\Delta_n^2 = \Delta_{n+1}^1 - \Delta_n^1 = (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$$

$$\Delta_n^3 = \Delta_{n+1}^2 - \Delta_n^2 = \dots = x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n$$

$$\Delta_n^5 = \Delta_{n+1}^4 - \Delta_n^4 = \dots = x_{n+5} - 5x_{n+4} + 10x_{n+3} - 10x_{n+2} + 5x_{n+1} - x_n$$

0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Obiekt dynamiczny dyskretny



u_n $U(z)$ - Sygnał wejściowy(*dyskretny*)

y_n $Y(z)$ - Sygnał wyjściowy(*dyskretny*)

Typowe opisy

Transmitancja

Transmitancja:

$$K(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$K(z) = \frac{b_v z^v + b_{v-1} z^{v-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad m > v$$

$$\mathcal{Z}[y_{n+m} + a_{m-1} y_{n+m-1} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n] = \mathcal{Z}[b_v u_{n+v} + b_{v-1} u_{n+v-1} + \dots + b_1 u_{n+1} + a_0 u_n]$$

$$Y(z)(z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0) = U(z)(b_v z^v + b_{v-1} z^{v-1} + \dots + b_1 z + b_0)$$

Przykład:

$$K(z) = \frac{1}{(z - (1 + \alpha))}$$



Rachunek bankowy

<http://www.freeclipartisland.com/>

Typowe opisy

dyskretna odpowiedź impulsowa

Dyskretna odpowiedź impulsowa
Transmitancja: $K(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$

$$Y(z) = K(z)U(z)$$

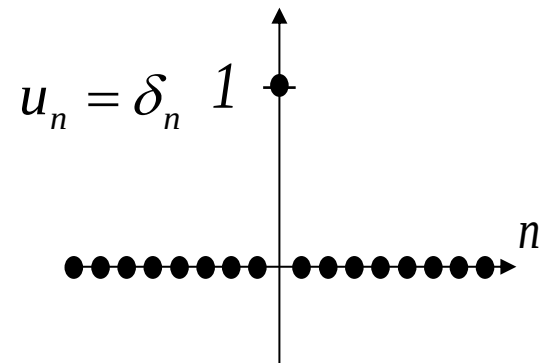
gdzie:

$$U(z) = \mathcal{Z}[\delta_n] = 1$$

oraz: δ_n delta Kroneker'a.

Dyskretna odpowiedź impulsowa:

$$k_{in} = \mathcal{Z}^{-1}[K(z)]$$



Delta Kroneker'a

Typowe opisy

dyskretna odpowiedź na skok jednostkowy

Odpowiedź na skok jednostkowy

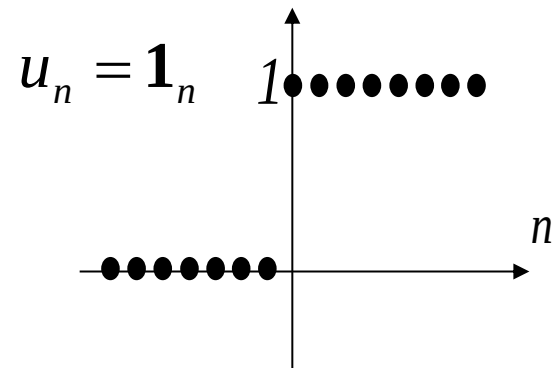
Transmitancja: $K(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$

$$Y(z) = K(z)U(z)$$

gdzie:

$$U(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{1}_n] = \frac{z}{z-1}$$

oraz: $\mathbf{1}_n$ dyskretny skok jednostkowy.

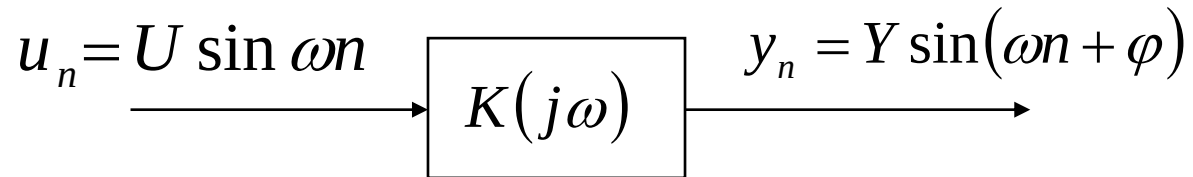


Dyskretny skok jednostkowy

Odpowiedź na skok jednostkowy:

$$h_n = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-1} K(z) \right]$$

Transmitancja widmowa – charakterystyki częstotliwościowe



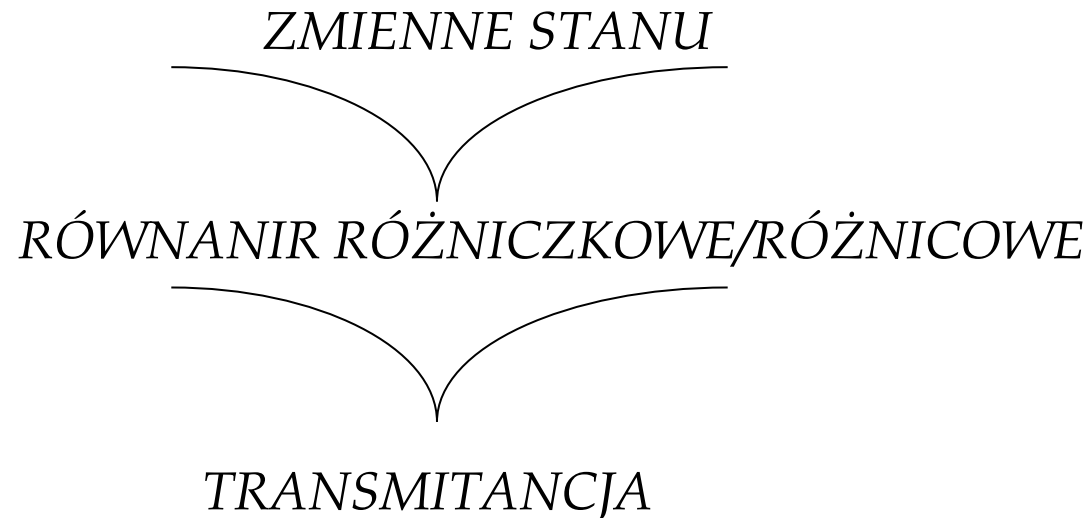
$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = K(z) \Big|_{z=j\omega}$$

$$K(j\omega) = \operatorname{Re}[K(j\omega)] + j \operatorname{Im}[K(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$|K(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

Typowe opisy

Relacja pomiędzy opisami



Typowe opisy

Relacja pomiędzy opisami

Przykład:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t), \quad y(0) = y'(0) = u(0) = 0$$

Transformata Laplace' a:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) \right] = \mathcal{L} \left[\frac{du(t)}{dt} + 2u(t) \right]$$

Transmitancja:

$$K(s) = \frac{s+2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s+2}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

Typowe opisy

Relacja pomiędzy opisami

Przykład cd.:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t), \quad y(0) = 0$$

Transformata Laplace'a

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt} + y(t)\right] = \mathcal{L}[u(t)]$$

Transmitancja:

$$K(s) = \frac{1}{s+1}$$

Typowe opisy

Relacja pomiędzy opisami

Przykład:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t) \qquad \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

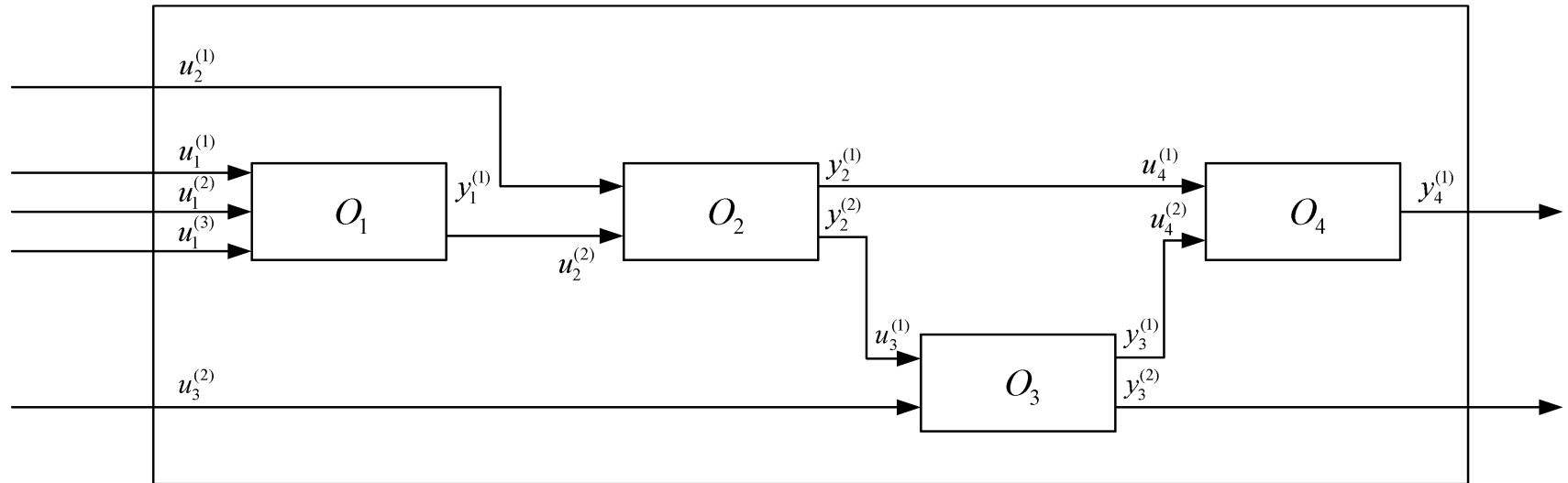
ZMIENNE STANU

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE/RÓŻNICOWE

$$K(s) = \frac{1}{s+1}$$

TRANSMITANCJA

Elementy (komponenty) systemu - działające części



Przykład systemu złożonego – produkcja aspiryny

Opis systemu złożonego

Wejściowo - wyjściowy system złożony z M podsystemami $O_1, O_2, \dots, O_M$.

$$y_m = F_m(u_m) \quad (\text{Uwaga! W tym miejscu mogą wystąpić różne typowe opisy})$$

Charakterystyka m -tego podsystemu, z wejściem u_m i wyjściem y_m , F_m jest znaną funkcją

$$u_m = \begin{bmatrix} u_m^{(1)} \\ u_m^{(2)} \\ \vdots \\ u_m^{(S_m)} \end{bmatrix} \in \mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{R}^{S_m}, \quad y_m = \begin{bmatrix} y_m^{(1)} \\ y_m^{(2)} \\ \vdots \\ y_m^{(L_m)} \end{bmatrix} \in \mathcal{Y}_m \subseteq \mathcal{R}^{L_m}, \quad m=1, 2, \dots, M.$$

gdzie: S_m oraz L_m są odpowiednio wymiarami przestrzeni wejść wyjść,

Opis systemu złożonego

Niech u, y , oznacza odpowiednio wektory wszystkich wejść i wyjść systemu złożonego:

$$u = \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ \vdots \\ u^{(S)} \end{bmatrix} \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(L)} \end{bmatrix} \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(\tilde{S})} \end{bmatrix}$$

Gdzie, wektor wszystkich wejść systemu: $u \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \cdots \times \mathcal{U}_M \subseteq \mathcal{R}^S$, $S = \sum_{m=1}^M S_m$,

wektor wszystkich wyjść systemu: $y \in \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \cdots \times \mathcal{Y}_M \subseteq \mathcal{R}^L$, $L = \sum_{m=1}^M L_m$,

oraz x jest $\tilde{S}$ - wymiarowym wejść zewnętrznych $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^{\tilde{S}}$.

Opis systemu złożonego

Struktura system jest dana zależnością:

$$u = Ay + Bx ,$$

gdzie: A jest $S \times L$ oraz B jest $S \times \tilde{S}$ zero – jedynkową macierzą.
Macierz A definiuje połączenia pomiędzy elementami system, tj.:

$$A = [a_{sl}] \Big|_{\substack{s=1,2,\dots,S \\ l=1,2,\dots,L}} , \quad a_{sl} = \begin{cases} 1 & \text{if } u^{(s)} = y^{(l)} \\ 0 & \text{if } u^{(s)} \neq y^{(l)} \end{cases} ,$$

A macierz B wskazuje wejścia zewnętrzne, tj.:

$$B = [b_{s\tilde{s}}] \Big|_{\substack{s=1,2,\dots,S \\ \tilde{s}=1,2,\dots,\tilde{S}}} , \quad b_{s\tilde{s}} = \begin{cases} 1 & \text{if } u^{(s)} = x^{(\tilde{s})} \\ 0 & \text{if } u^{(s)} \neq x^{(\tilde{s})} \end{cases} .$$

Opis systemu złożonego

Wyjścia zewnętrzne systemu: $v = \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ \vdots \\ v^{(\tilde{L})} \end{bmatrix}.$

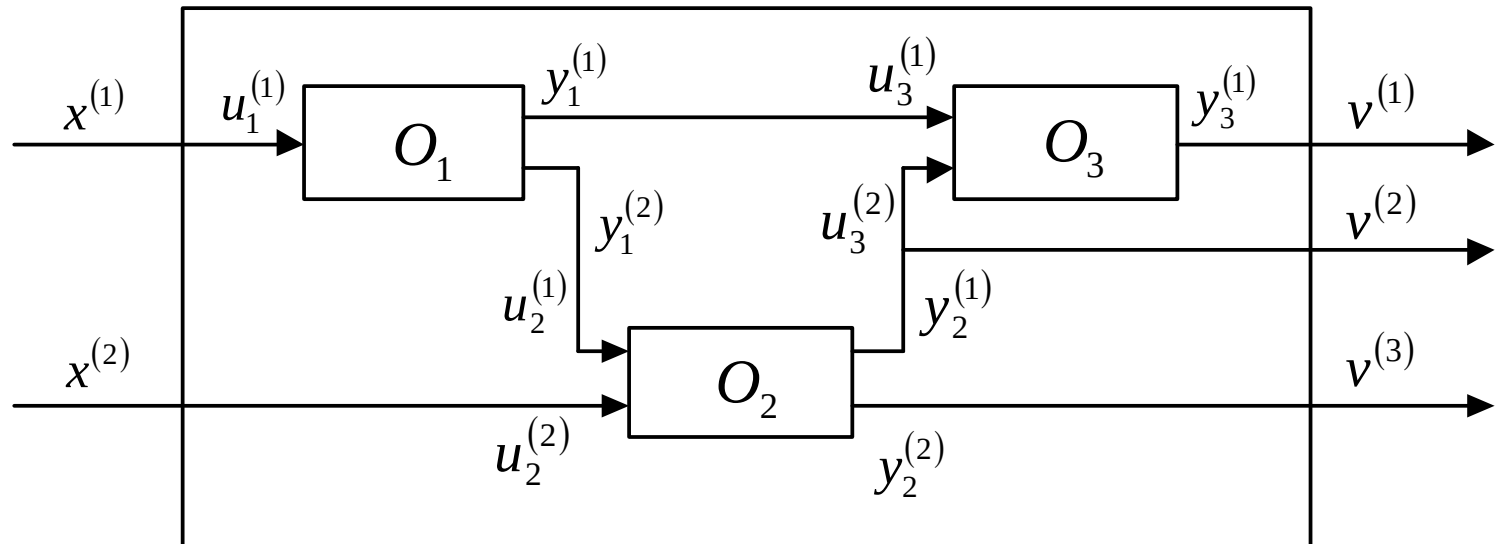
$\tilde{L}$ wymiarowy wektor v , jest wektorem wybranych wyjść spośród wszystkich wyjść i jest określony przez $\tilde{L} \times L$ wymiarową macierz C ,
 $v = Cy$,

gdzie

$$C = [c_{\tilde{l}l}]_{\substack{\tilde{l}=1,2,\dots,\tilde{L} \\ l=1,2,\dots,L}}, \quad c_{\tilde{l}l} = \begin{cases} 1 & \text{if } v^{(\tilde{l})} = y^{(l)} \\ 0 & \text{if } v^{(\tilde{l})} \neq y^{(l)} \end{cases}.$$

Wektor wyjść zewnętrznych: $v \in \mathcal{V} = \{v : \forall y \in \mathcal{Y}, v = Cy\} \subseteq \mathcal{R}^{\tilde{L}}.$

Opis systemu złożonego



Przykład systemu złożonego

Opis systemu złożonego

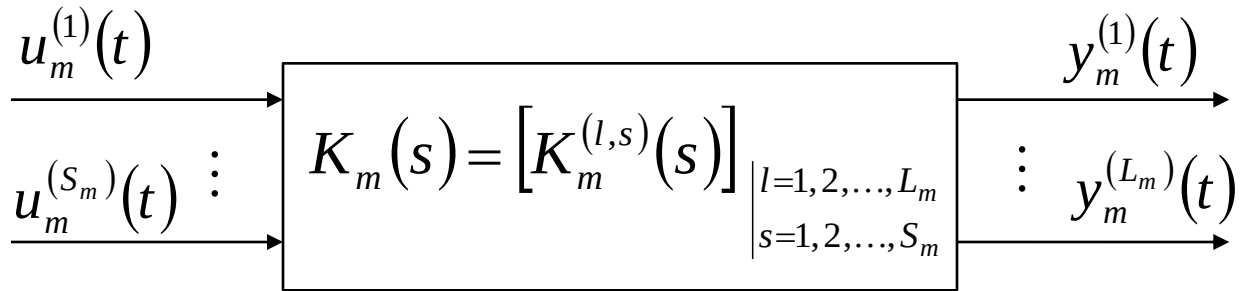
$$u = Ay + Bx$$

$$\begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(1)} \\ u_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)} \\ y_2^{(2)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$v = Cy$$

$$\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ v^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)} \\ y_2^{(2)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Opis systemu złożonego



Opis m – tego elementu ma postać:

$$Y_m(s) = K_m(s)U_m(s) \quad m = 1, 2, \dots, M$$

gdzie: $K_m(s) = [K_m^{(l,s)}(s)]_{\substack{l=1,2,\dots,L_m \\ s=1,2,\dots,S_m}}$ jest macierzą transmitancji o wymiarach $L_m \times S_m$

$$K_m^{(l,s)}(s) = \frac{Y_m^l(s)}{U_m^s(s)}, \quad l = 1, 2, \dots, L_m, \quad s = 1, 2, \dots, S_m$$

Opis systemu złożonego

Wektor wszystkich wyjść $Y(s)$ zależy w następujący sposób od wszystkich wejść $U(s)$:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_M(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1(s) & O & \cdots & O \\ O & K_2(s) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & K_M(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_M(s) \end{bmatrix}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$K(s) \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} K_1(s) & O & \cdots & O \\ O & K_2(s) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & K_M(s) \end{bmatrix}, \quad Y(s) \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_M(s) \end{bmatrix}, \quad U(s) \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_M(s) \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy:

$$Y(s) = K(s)U(s)$$

Opis systemu złożonego

Uwzględniając równania opisujące strukturę systemu otrzymujemy układ równań:

$$Y(s) = K(s)U(s) \quad (1), \quad U(s) = AY(s) + BX(s) \quad (2), \quad V(s) = CY(s) \quad (3)$$

Wstawiając (2) do (1) otrzymujemy:

$$Y(s) = K(s)U(s) = K(s)(AY(s) + BX(s))$$

$$Y(s) - K(s)AY(s) = [I - K(s)A]Y(s) = K(s)BX(s)$$

Stąd:

$$Y(s) = [I - K(s)A]^{-1} K(s)BX(s)$$

Uwzględniając (3) otrzymujemy zależność pomiędzy wejściem zewnętrznym $X(s)$ a wyjściem zewnętrznym $V(s)$:

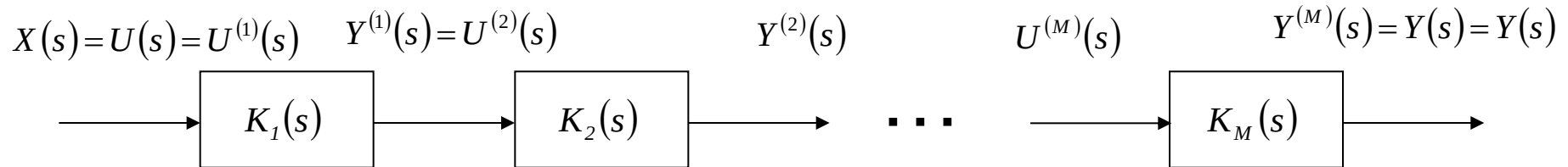
$$V(s) = CY(s) = C[I - K(s)A]^{-1} K(s)BX(s)$$

Ostatecznie:

$$V(s) = \tilde{K}(s)X(s), \quad \text{gdzie: } \tilde{K}(s) = C[I - K(s)A]^{-1} K(s)B$$

Typowe struktury

∞ Połączenie szeregowe



$$Y^{(1)}(s) = K_1(s)U^{(1)}(s) = K_1(s)U(s)$$

$$Y^{(2)}(s) = K_2(s)U^{(2)}(s) = K_2(s)Y^{(1)}(s) = K_2(s)K_1(s)U^{(1)}(s)$$

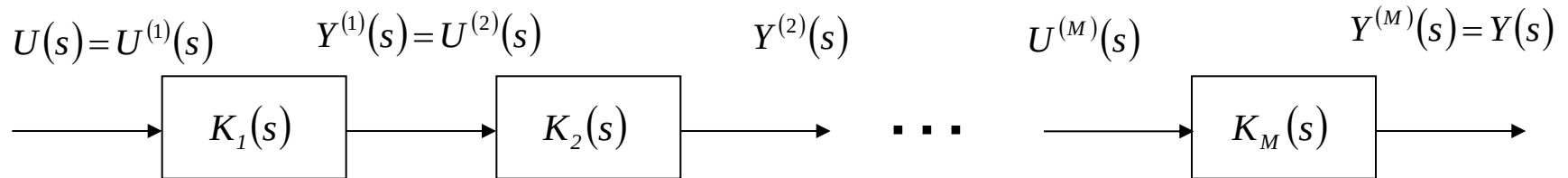
.....

$$Y^{(M)}(s) = Y(s) = K_M(s)U^{(M)}(s) = K_M(s)K_{M-1}(s)U^{(M-1)}(s) = K_M(s)K_{M-1}(s)\dots K_2(s)K_1(s)U^{(1)}(s) = \\ = K_M(s)K_{M-1}(s)\dots K_2(s)K_1(s)U(s)$$

$$K(s) = \prod_{m=1}^M K_m(s)$$

Typowe struktury

∞ Połączenie szeregowe



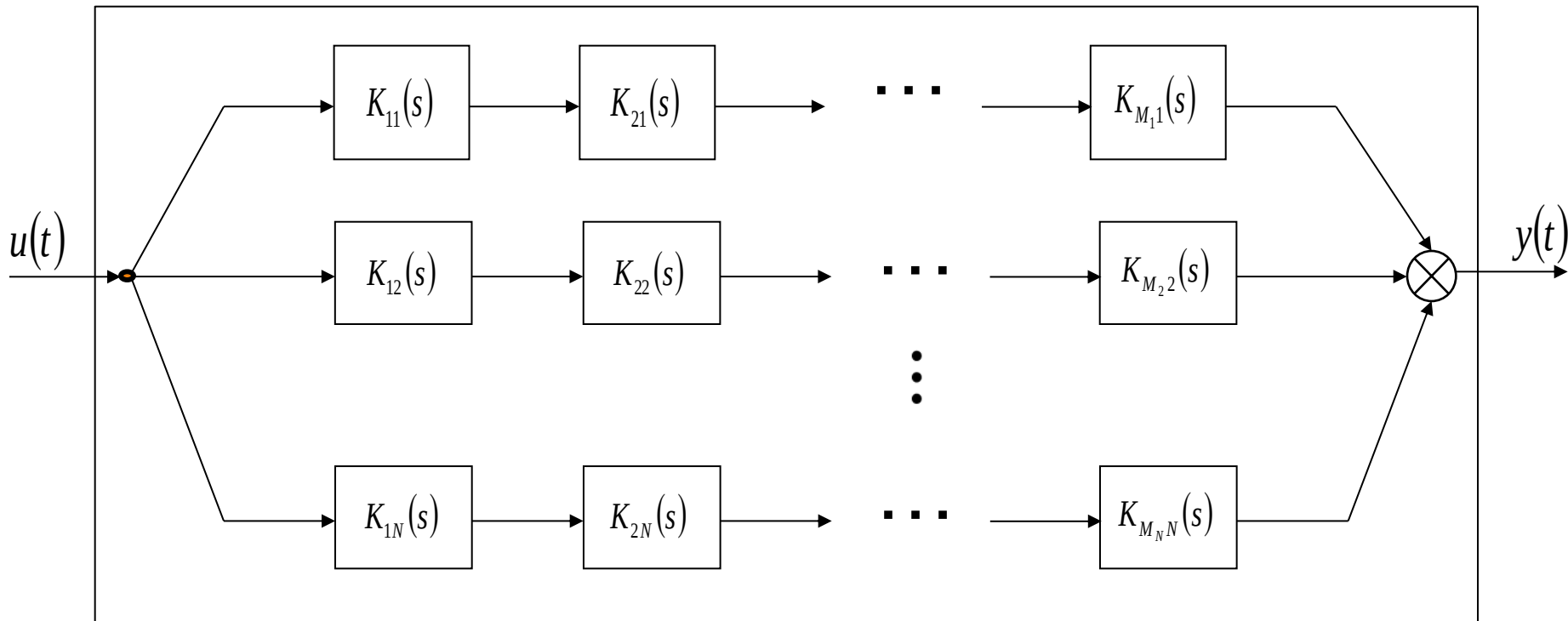
Transmitancja zastępcza:

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K_M(s)K_{M-1}(s)\dots K_2(s)K_1(s)$$

$$K(s) = \prod_{m=1}^M K_m(s)$$

Typowe struktury

Struktura szeregowo-równoległa

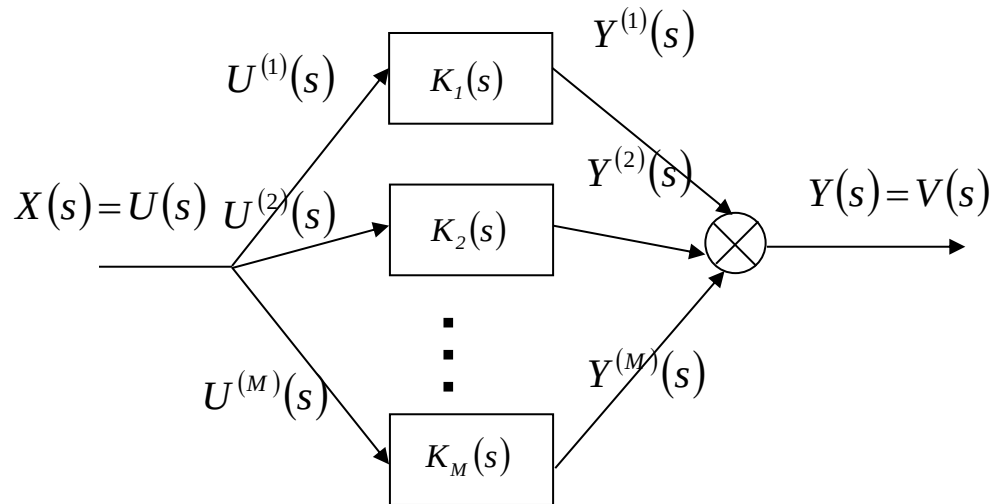


Transmitancja zastępcza:

$$K(s) = \sum_{n=1}^N \prod_{m=1}^{M_n} K_{nm}(s)$$

Typowe struktury

∞ Połączenia równoległe



$$U^{(1)}(s) = U^{(2)}(s) = \dots U^{(M)}(s) = U(s)$$

$$Y(s) = \sum_{i=1}^M Y^{(i)}(s)$$

$$Y^{(1)}(s) = K_1(s)U(s)$$

$$Y^{(2)}(s) = K_2(s)U(s)$$

.....

$$Y^{(M)}(s) = K_M(s)U(s)$$

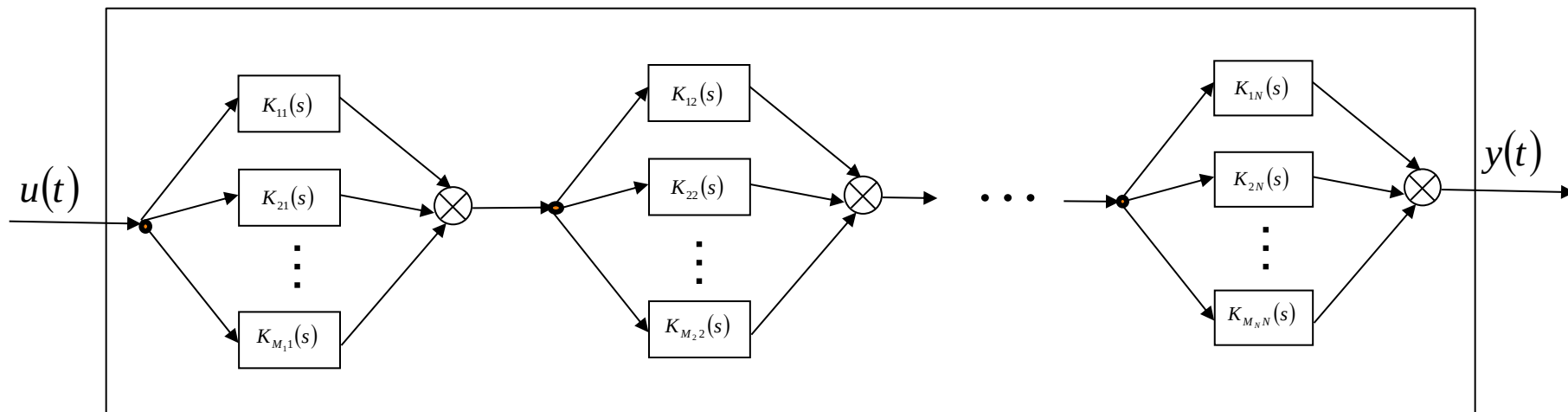
$$Y(s) = U(s) \sum_{i=1}^M K_i(s)$$

○ Transmitancja zastępcza:

$$K(s) = \sum_{m=1}^M K_m(s)$$

Typowe struktury

Struktura równoległo-szeregowa

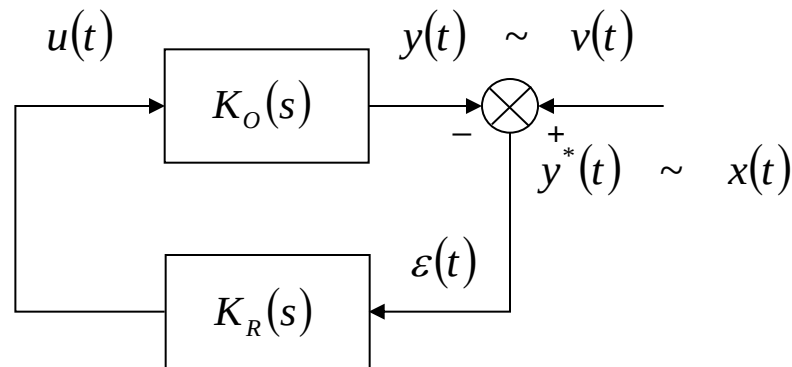


Transmitancja zastępcza:

$$K(s) = \prod_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} K_{mn}(s)$$

Typowe struktury

∞ Układ ze sprzężeniem zwrotnym



$$Y(s) = K_o(s)U(s)$$

$$U(s) = K_R(s)E(s)$$

$$E(s) = Y^*(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = K_Z(s)Y^*(s)$$

$$V(s) = Y(s), \quad X(s) = Y^*(s)$$

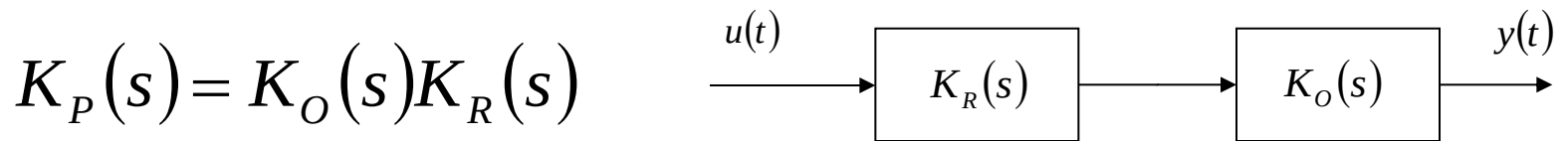
Typowe struktury

∞ Układ ze sprzężeniem zwrotnym

$K_Z(s)$ - Transmitancja systemu zamkniętego

$$K_Z(s) = \frac{K_P(s)}{1 + K_P(s)}$$

$K_P(s)$ - Transmitancja układu otwartego

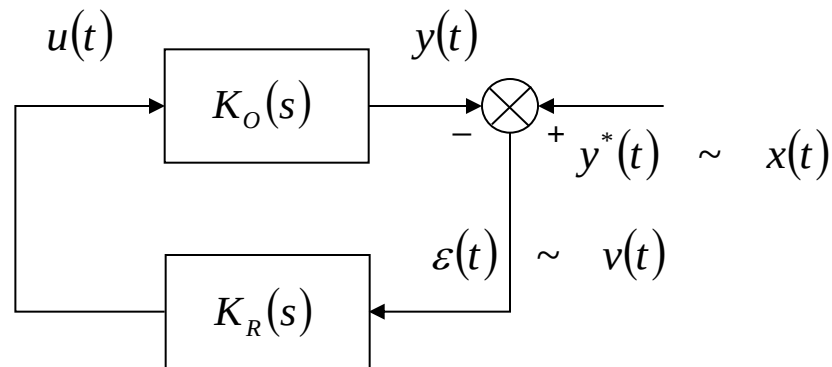


Ostatecznie:

$$K_Z(s) = \frac{Y(s)}{Y^*(s)} = \frac{K_O(s)K_R(s)}{1 + K_O(s)K_R(s)}$$

Typowe struktury

☞ Układ ze sprzężeniem zwrotnym



$$Y(s) = K_o(s)U(s)$$

$$U(s) = K_R(s)E(s)$$

$$E(s) = Y^*(s) - Y(s)$$

$$E(s) = K_\varepsilon(s)Y^*(s)$$

$$V(s) = E(s), \quad X(s) = Y^*(s)$$

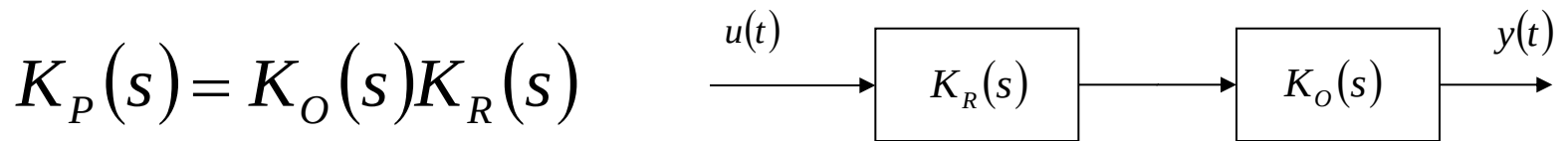
Typowe struktury

∞ Układ ze sprzężeniem zwrotnym

$K_\varepsilon(s)$ - Transmitancja błędu układu zamkniętego

$$K_\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + K_P(s)}$$

$K_P(s)$ - Transmitancja układu otwartego



Ostatecznie:

$$K_\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{Y^*(s)} = \frac{1}{1 + K_O(s)K_R(s)}$$

Dziękuję za uwagę

