

Modele systemów dynamicznych



Wykład 4. Podstawowe liniowe elementy dynamiczne i ich opisy

Typowe opisy zmienne stanu – równania stanu

Przypadek ciągły:

Wektor stanu: $x(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(K)}(t) \end{bmatrix}$

Równania stanu:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), u(t)), \quad x(t_0)$$
$$y(t) = G(x(t), u(t))$$

Warunki początkowe:

Przypadek liniowy:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Typowe opisy równania różniczkowe

Równanie różniczkowe:

$$F\left(\frac{d^m y(t)}{dt^m}, \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t); \frac{d^v u(t)}{dt^v}, \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}}, \dots, \frac{du(t)}{dt}, u(t)\right) = 0$$

Warunki początkowe

Liniowe równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} \frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= m \geq v \\ = b_v \frac{d^v u(t)}{dt^v} + b_{v-1} \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned}$$

Warunki początkowe

Typowe opisy transmitancja

Transmitancja:

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad K(s) = \frac{b_v s^v + b_{v-1} s^{v-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad m \geq v$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \right] = \mathcal{L} \left[b_v \frac{d^v u(t)}{dt^v} + b_{v-1} \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + a_0 u(t) \right]$$

Zerowe warunki początkowe

$$Y(s)(s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0) = U(s)(b_v s^v + b_{v-1} s^{v-1} + \dots + b_1 s + b_0)$$

Typowe opisy odpowieź impulsowa

Odpowiedź impulsowa

Transmitancja:

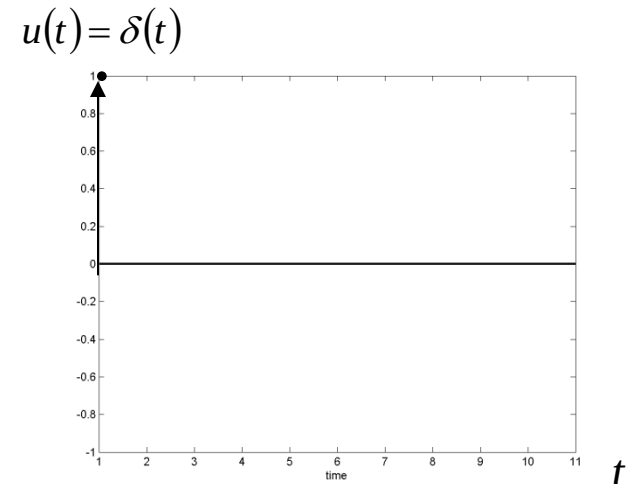
$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$Y(s) = K(s)U(s)$$

gdzie:

$$U(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

oraz: $\delta(t)$ delta Dirac'a.



Odpowiedź impulsowa: $k_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)]$ Delta Dirac'a

Typowe opisy odpowieź na skok jednostkowy

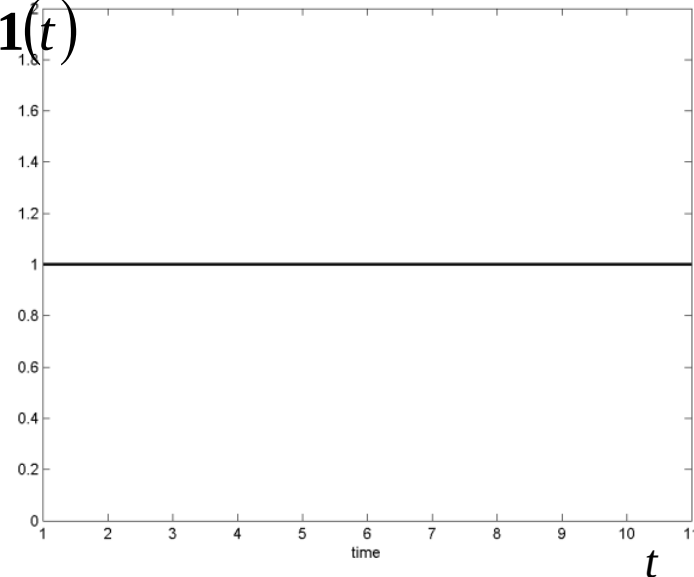
Odpowiedź na skok jednostkowy

Transmitancja: $K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ $u(t) = \mathbf{1}(t)$

$$Y(s) = K(s)U(s)$$

gdzie: $U(s) = \mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}$

oraz: $\mathbf{1}(t)$ jest skokiem jednostkowym.

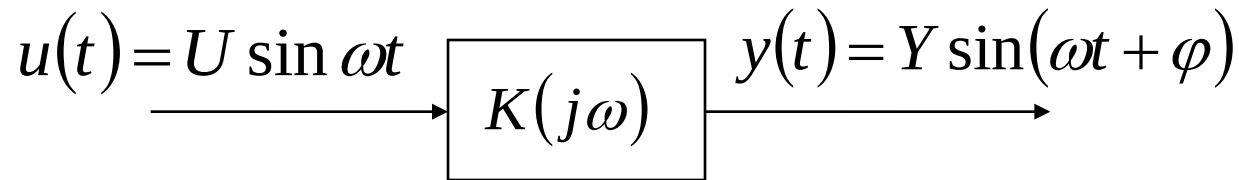


Odpowiedź na skok
jednostkowy:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K(s)}{s} \right]$$

Skok jednostkowy

Transmitancja widmowa – charakterystyki częstotliwościowe



$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = K(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$K(j\omega) = \operatorname{Re}[K(j\omega)] + j \operatorname{Im}[K(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega)$$

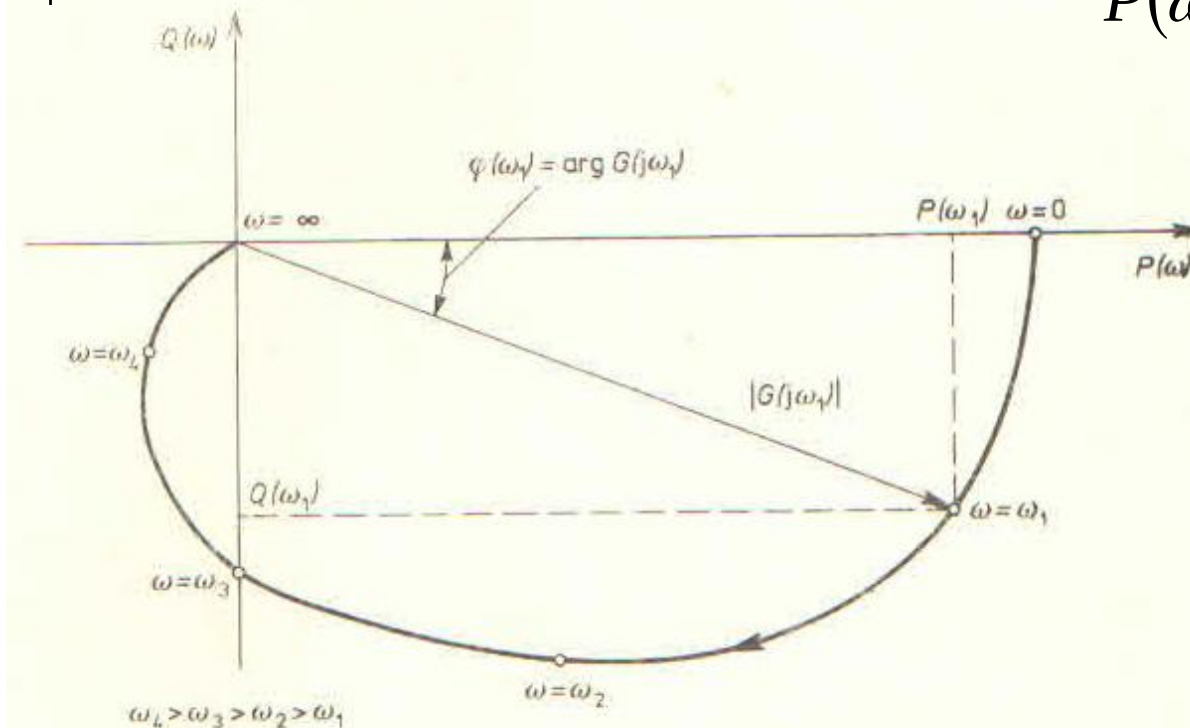
$$|K(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

Typowe opisy

Charakterystyka częstotliwościowa

$$K(j\omega) = \operatorname{Re}[K(j\omega)] + j \operatorname{Im}[K(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$|K(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element proporcjonalny (idealny)

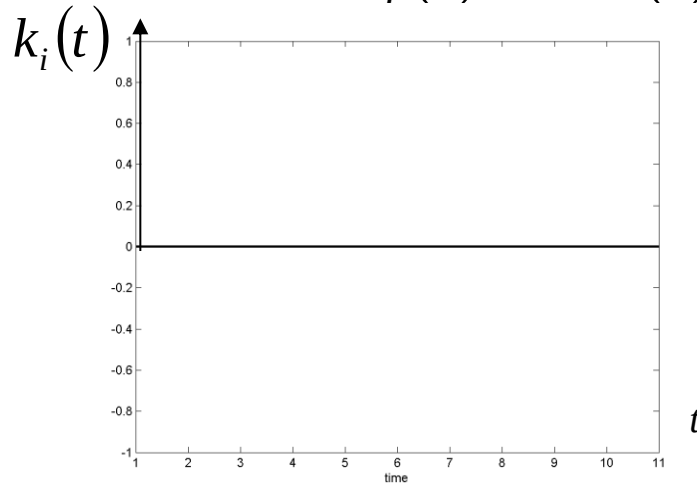
$$y(t) = ku(t)$$

Transmitancja:

$$K(s) = k$$

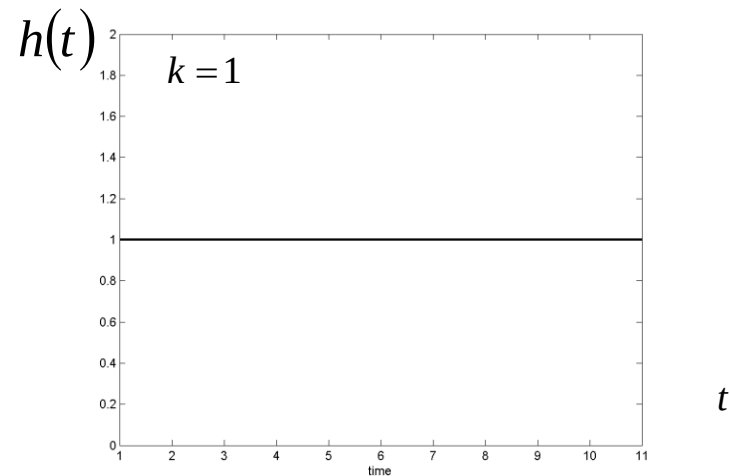
Odpowiedź impulsowa:

$$\cdot \quad k_i(t) = k\delta(t)$$



Odpowiedź skokowa:

$$h(t) = k\mathbf{1}(t)$$

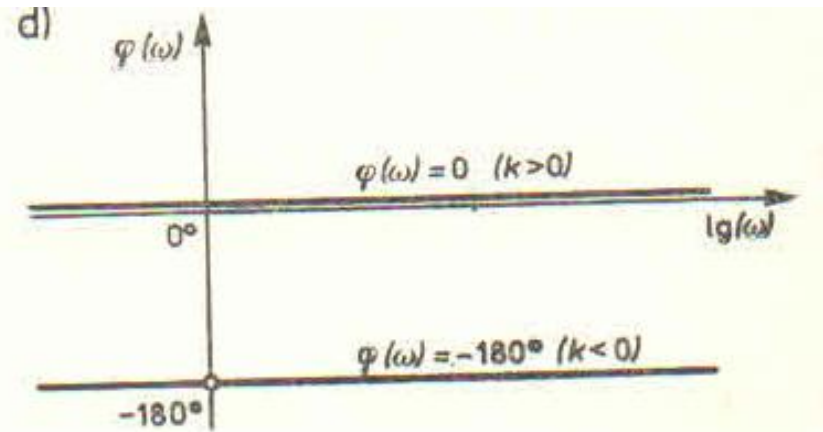
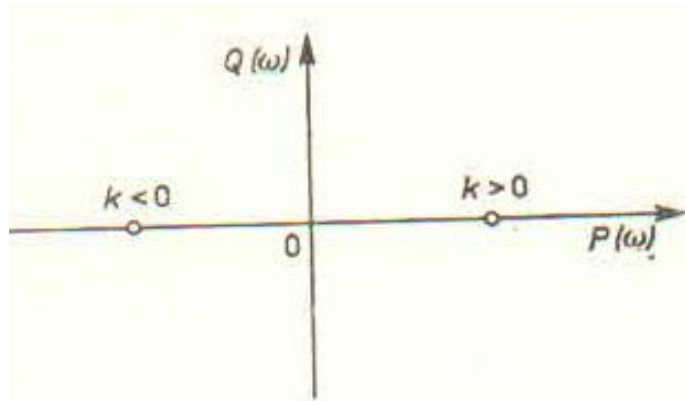


Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element proporcjonalny

$$K(s) \Big|_{s=j\omega} = k \Big|_{s=j\omega} = k + j0$$

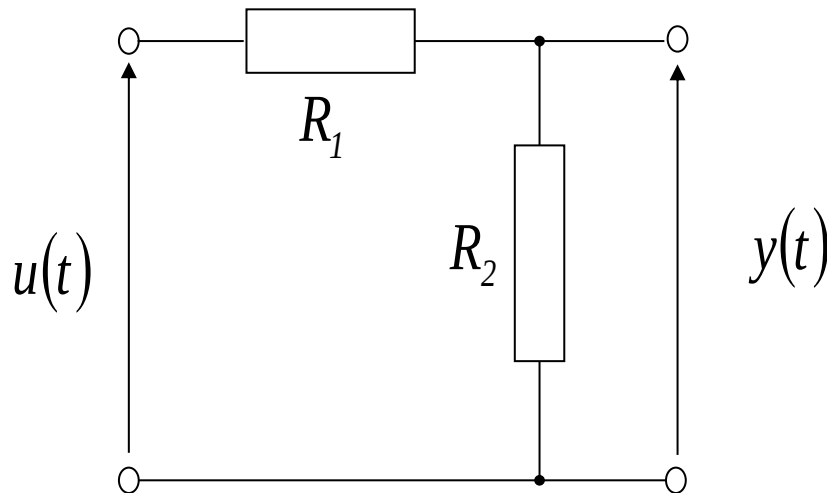
$$|K(j\omega)| = k, \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{0}{k}, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{0}{k} = \begin{cases} 0 & k > 0 \\ -\pi & k < 0 \end{cases}$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element proporcjonalny

○ Przykład:

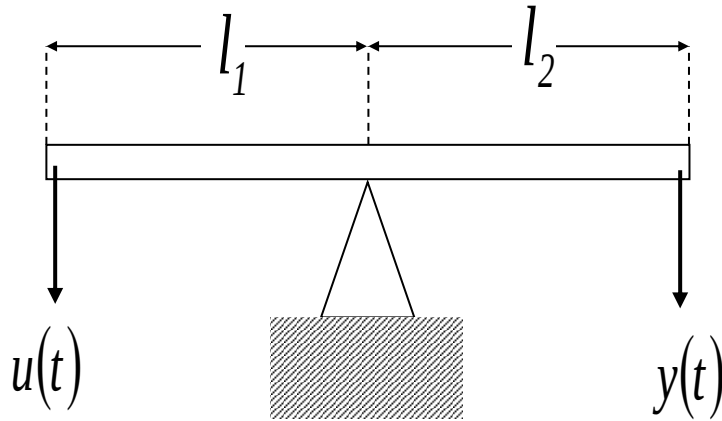


$$y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u(t)$$
$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = k$$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element proporcjonalny

○ Przykład:



$$l_2 y(t) = l_1 u(t)$$

$$y(t) = \frac{l_1}{l_2} u(t)$$

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{l_1}{l_2} = k$$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element proporcjonalny (idealny)

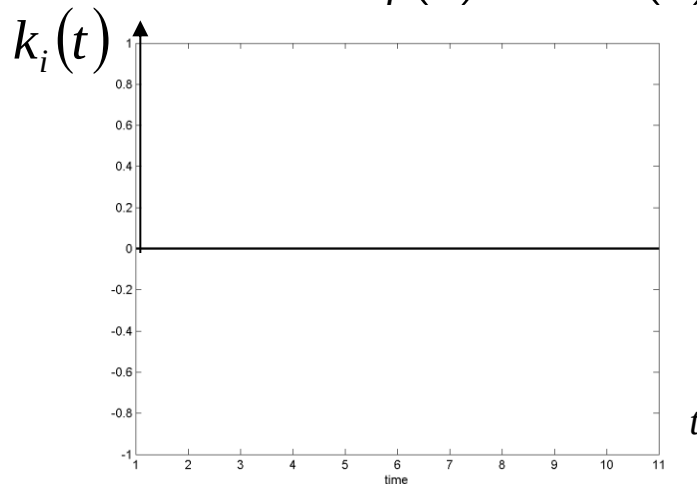
$$y(t) = ku(t)$$

Transmitancja:

$$K(s) = k$$

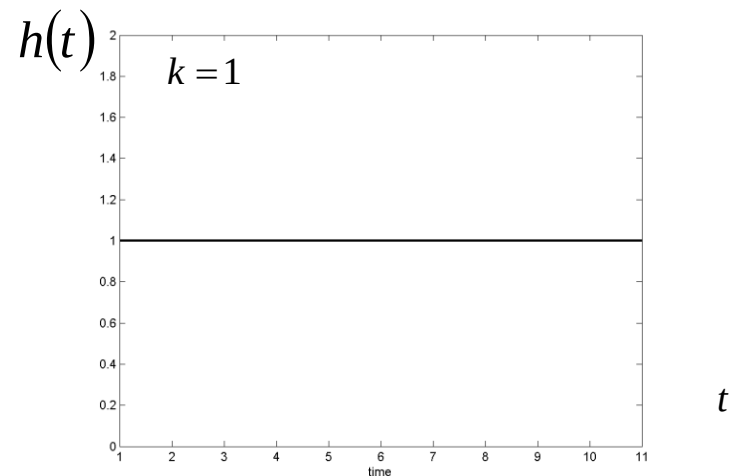
Odpowiedź impulsowa:

$$\cdot \quad k_i(t) = k\delta(t)$$



Odpowiedź skokowa:

$$h(t) = k\mathbf{1}(t)$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element całkujący (idealny)

$$\frac{dy(t)}{dt} = ku(t), \quad y(t) = k \int_0^t u(\tau) d\tau$$

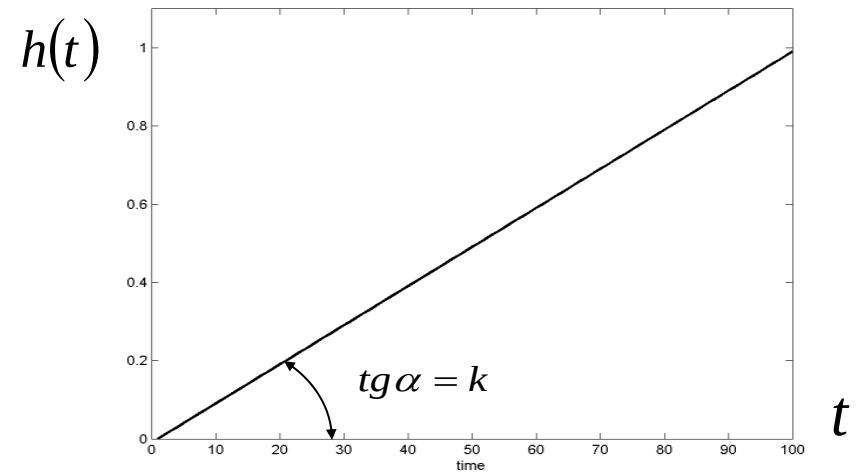
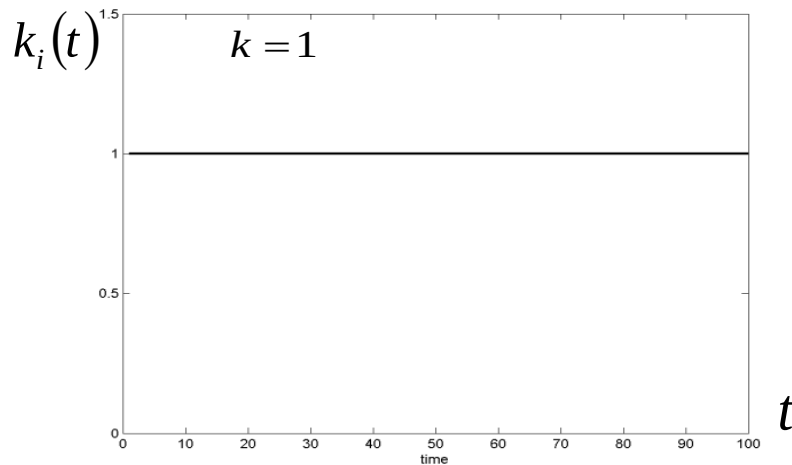
Transmitancja: $K(s) = \frac{k}{s}$

Odpowiedź impulsowa:

$$k_i(t) = k\mathbf{1}(t)$$

Odpowiedź skokowa:

$$h(t) = kt\mathbf{1}(t)$$



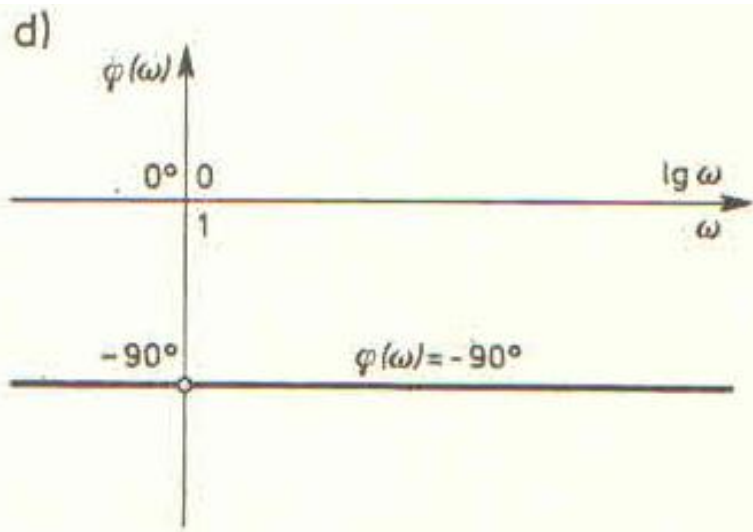
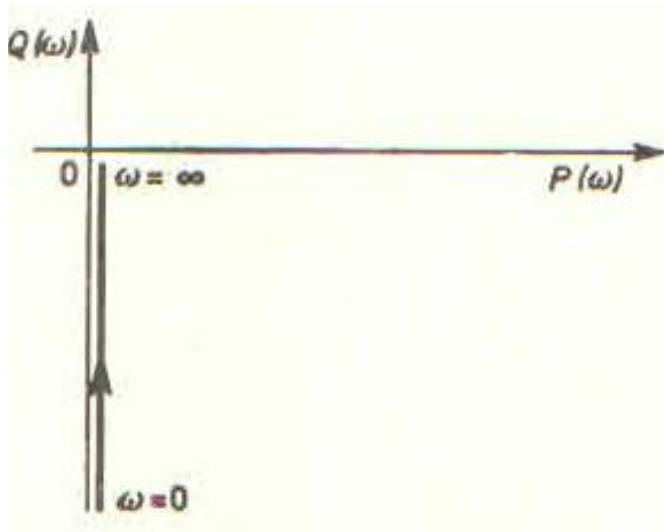
W rzeczywistości nie istnieje

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element całkujący

$$K(j\omega) = K(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{k}{s} \Big|_{s=j\omega} = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}$$

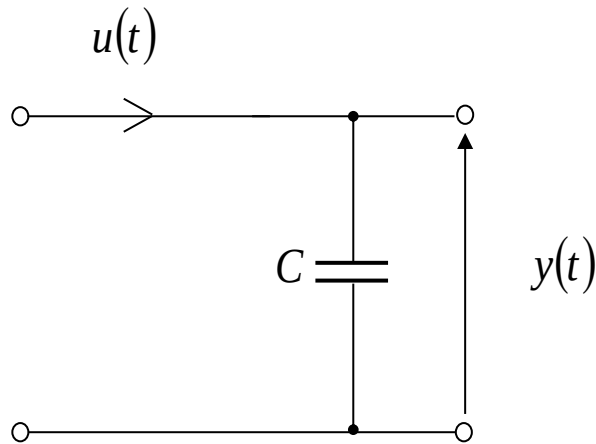
$$|K(j\omega)| = \frac{k}{\omega}, \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{\alpha} = -\infty, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element całkujący

○ Przykład



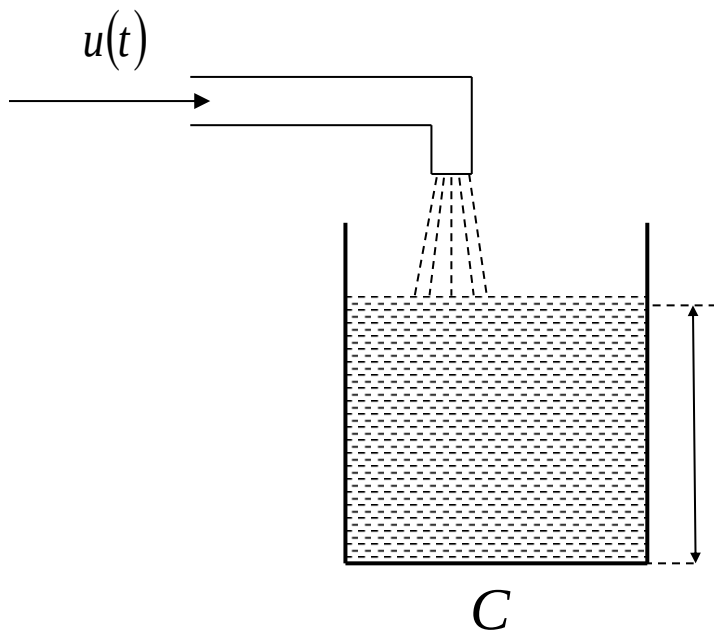
$$y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t u(\tau) d\tau \quad \text{gdzie: } C \text{ pojemność}$$

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/C}{s} = \frac{1}{Cs} = \frac{k}{s} \quad \text{gdzie: } k = \frac{1}{C}$$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element całkujący

○ Przykład



$$y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t u(\tau) d\tau$$

gdzie: C - powierzchnia zbiornika

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Cs} = \frac{k}{s} \quad \text{gdzie: } k = \frac{1}{C}$$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element całkujący (idealny)

$$\frac{dy(t)}{dt} = ku(t), \quad y(t) = k \int_0^t u(\tau) d\tau$$

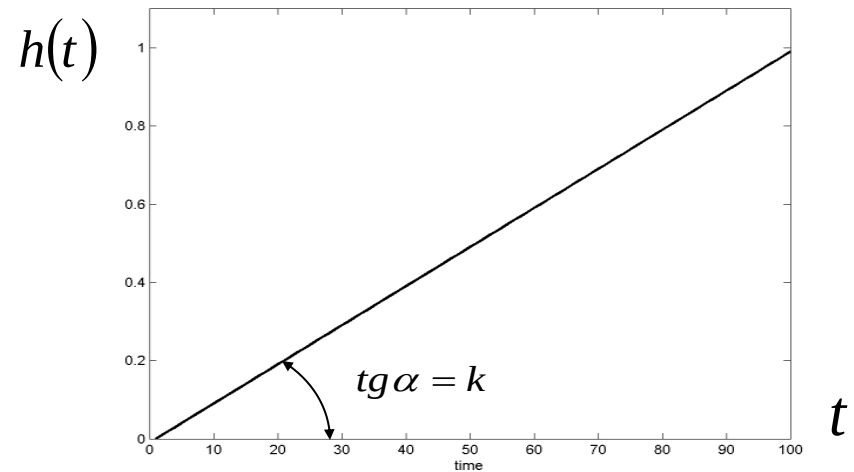
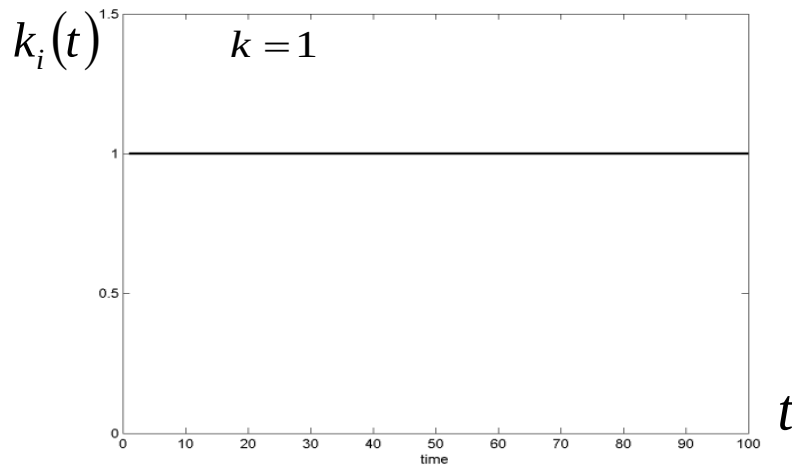
Transmitancja: $K(s) = \frac{k}{s}$

Odpowiedź impulsowa:

$$k_i(t) = k\mathbf{1}(t)$$

Odpowiedź skokowa:

$$h(t) = kt\mathbf{1}(t)$$



W rzeczywistości nie istnieje

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

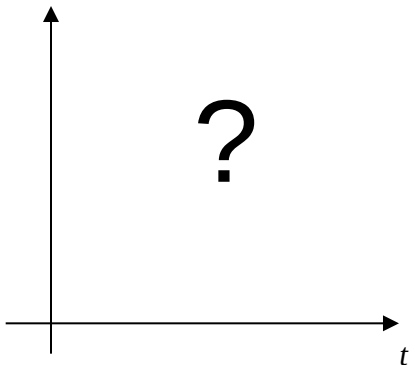
∞ Element różniczkujący (idealny)

$$y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

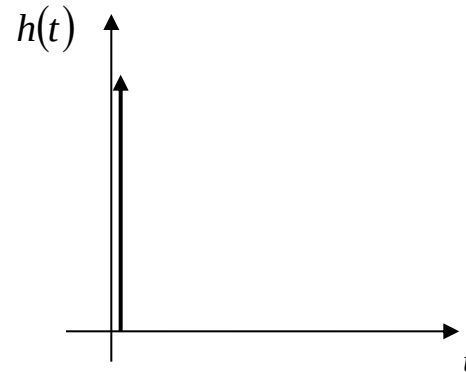
Transmitancja: $K(s) = ks$

W rzeczywistości nie istnieje

Odpowiedź impulsowa: ?



Odpowiedź skokowa: $h(t) = k\delta(t)$

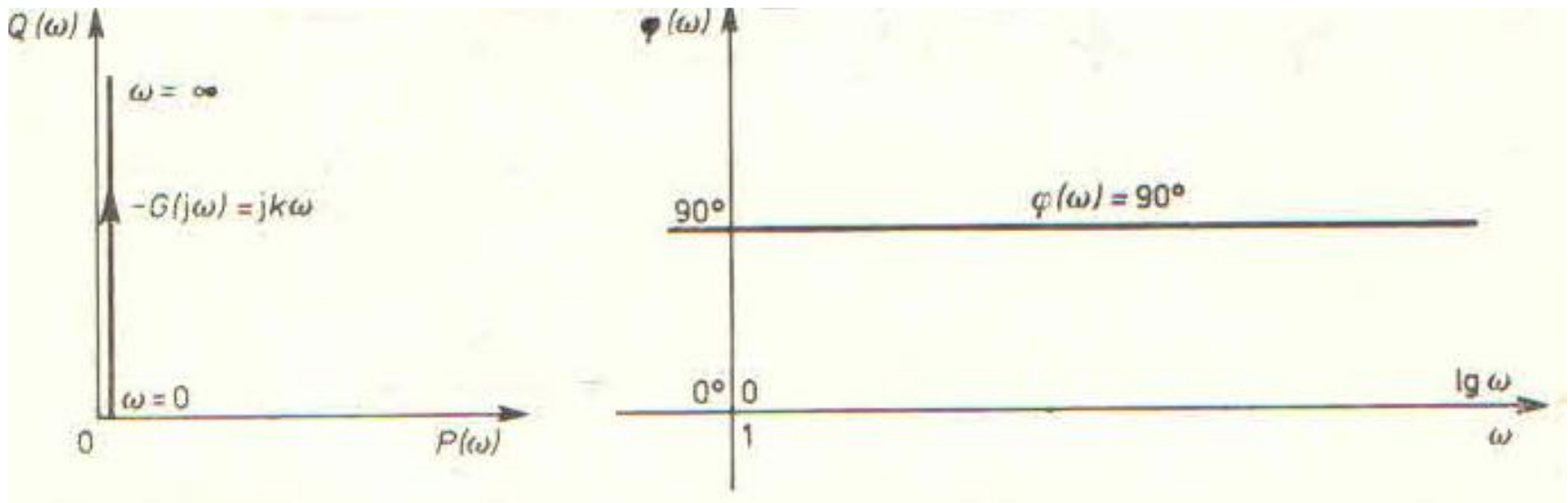


Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element różniczkujący

$$K(s) \Big|_{s=j\omega} = ks \Big|_{s=j\omega} = jk\omega$$

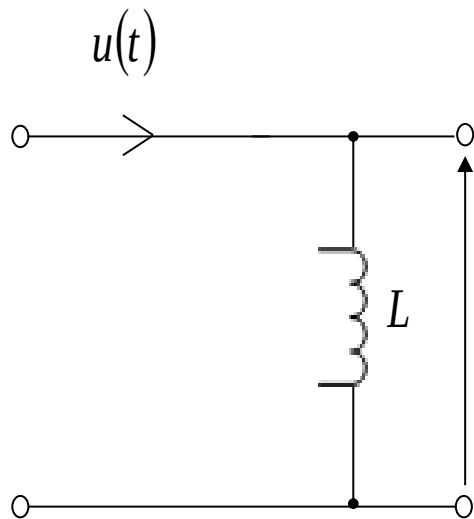
$$|K(j\omega)| = k\omega, \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{k\omega}{\alpha} = \infty, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element różniczkujący

○ Przykład



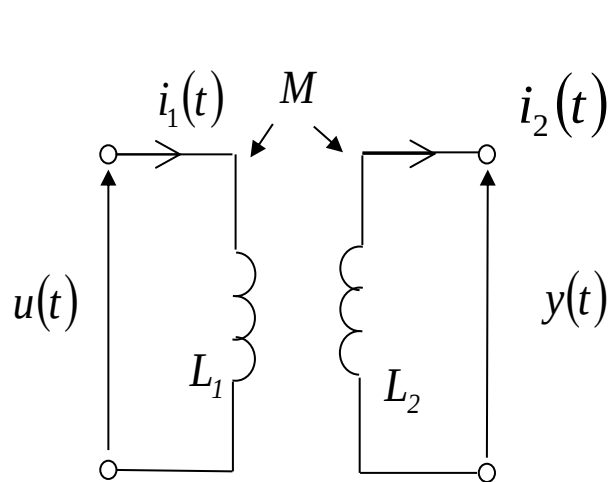
$$y(t) = L \frac{du(t)}{dt} \quad \text{gdzie: } L \text{ inдуктaнцja}$$

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = Ls = ks \quad \text{gdzie: } k = L$$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element różniczkujący

○ Przykład



$$u(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$$

gdzie: L_1 - indukcyjność

$$y(t) = M \frac{di_1(t)}{dt}$$

gdzie: M współczynnik transformacji

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{M}{L_1} = ks$$

gdzie: $k = \frac{M}{L_1}$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

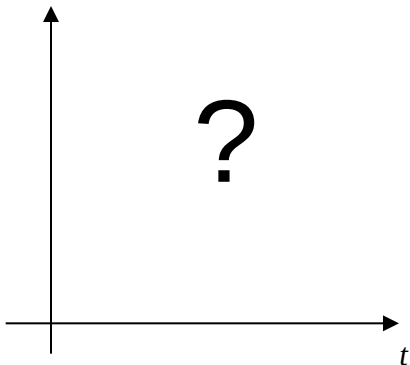
∞ Element różniczkujący (idealny)

$$y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

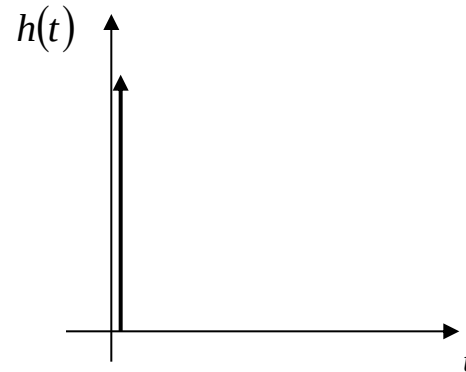
Transmitancja: $K(s) = ks$

W rzeczywistości nie istnieje

Odpowiedź impulsowa: ?



Odpowiedź skokowa: $h(t) = k\delta(t)$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

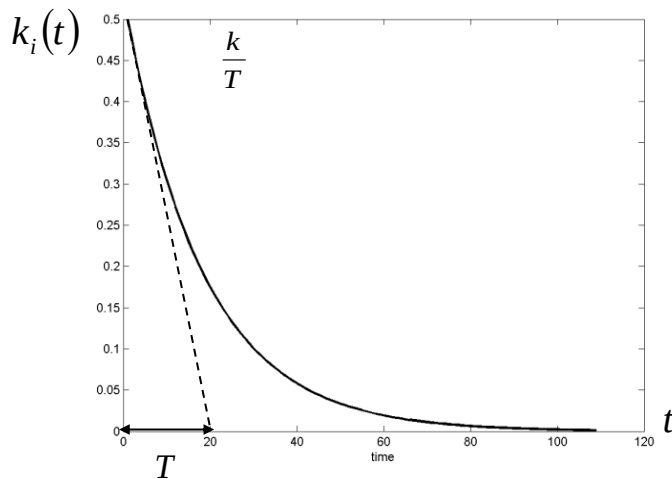
∞ Element inercyjny pierwszego rzędu

(proporcjonalny z inercją)

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$$

Odpowiedź impulsowa:

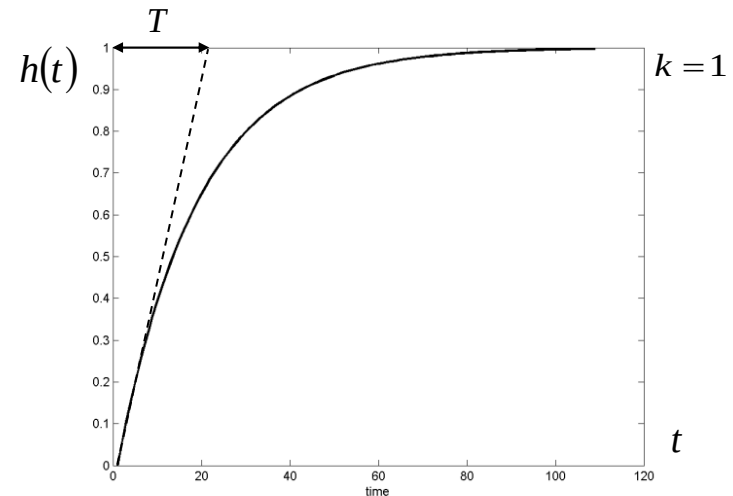
$$k_i(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} \mathbf{1}(t)$$



$$K(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad T > 0$$

Odpowiedź skokowa

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T}) \mathbf{1}(t)$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element inercyjny

$$\begin{aligned} K(s) \Big|_{s=j\omega} &= \frac{k}{sT + 1} \Big|_{s=j\omega} = \frac{k}{j\omega T + 1} = \frac{k(1 - j\omega T)}{1 + \omega^2 T^2} = \\ &= \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \end{aligned}$$

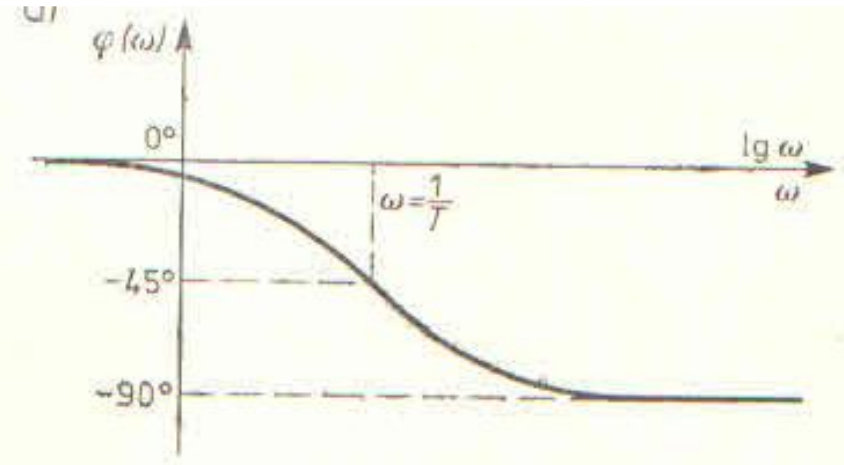
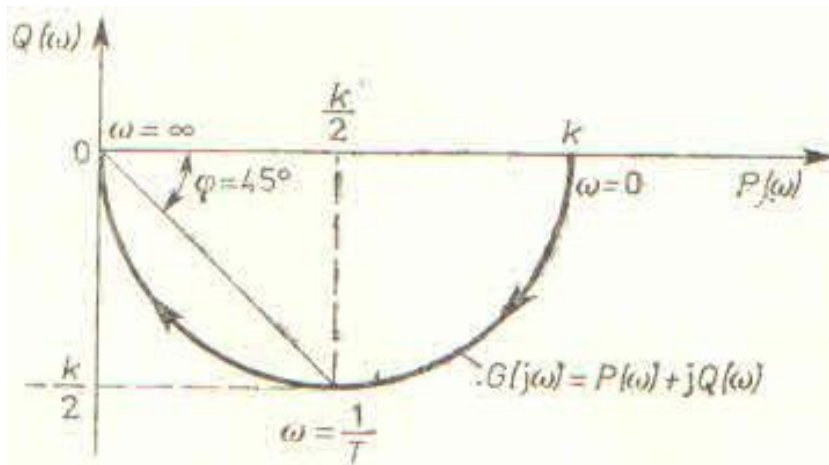
$$|K(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = -\omega T, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(-\omega T)$$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element inercyjny

$$K(j\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

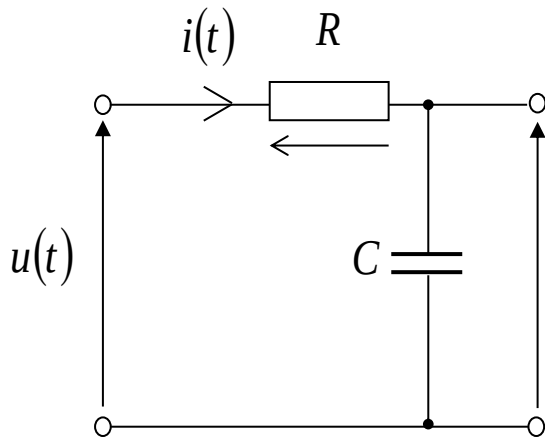
$$|K(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = -\omega T, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(-\omega T)$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykład:



$$u(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad \text{gdzie: } C - \text{pojemność}$$

R - opór

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$y(t) \quad u(t) = RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{k}{Ts + 1}$$

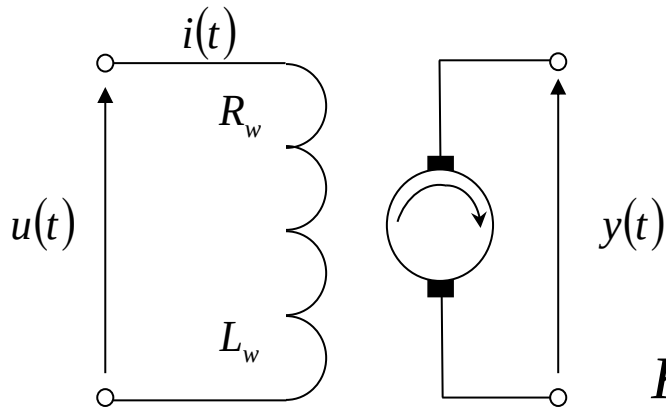
gdzie: $T = RC$
 $k = 1$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element inercyjny pierwszego rzędu

○ Przykład

$$u(t) = R_w i(t) + L_w \frac{di(t)}{dt} \quad \text{gdzie: } L_w - \text{inductancja}$$
$$y(t) = \alpha i(t) \quad R_w - \text{opór}$$



$$\frac{R_w}{\alpha} y(t) + \frac{L_w}{\alpha} \frac{dy(t)}{dt} = u(t)$$
$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{L_w s + R_w} = \frac{\frac{\alpha}{R_w}}{\frac{L_w}{R_w} s + 1} = \frac{k}{Ts + 1}$$

$y(t)$ – prędkość obrotowa

gdzie: $k = \frac{\alpha}{R_w}$, $T = \frac{L_w}{R_w}$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

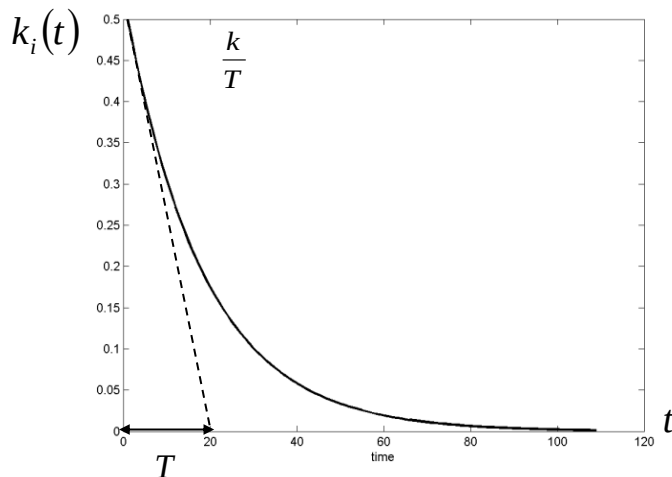
∞ Element inercyjny pierwszego rzędu

(proporcjonalny z inercją)

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$$

Odpowiedź impulsowa:

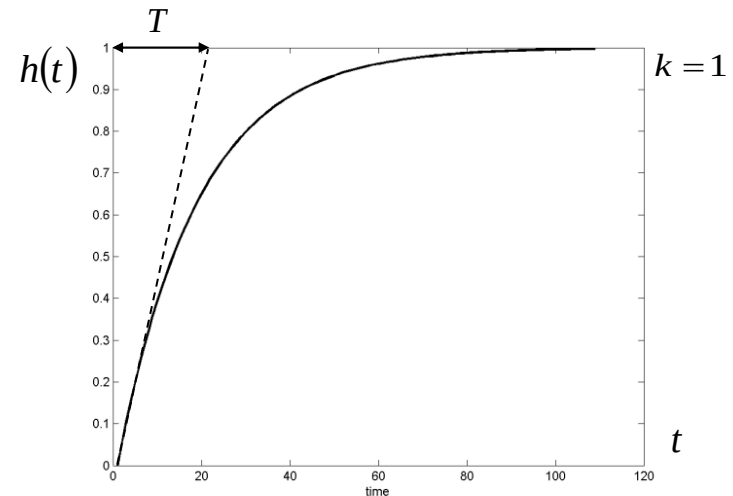
$$k_i(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} \mathbf{1}(t)$$



$$K(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad T > 0$$

Odpowiedź skokowa

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T}) \mathbf{1}(t)$$



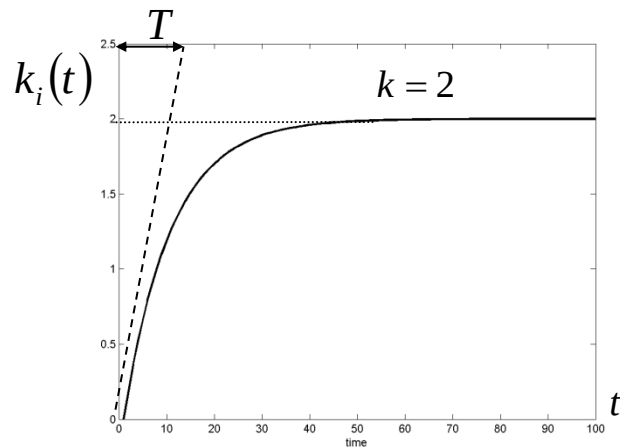
Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element całkujący z inercją

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \int_0^t u(\tau) d\tau \quad T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = ku(t) \quad K(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}, \quad T > 0$$

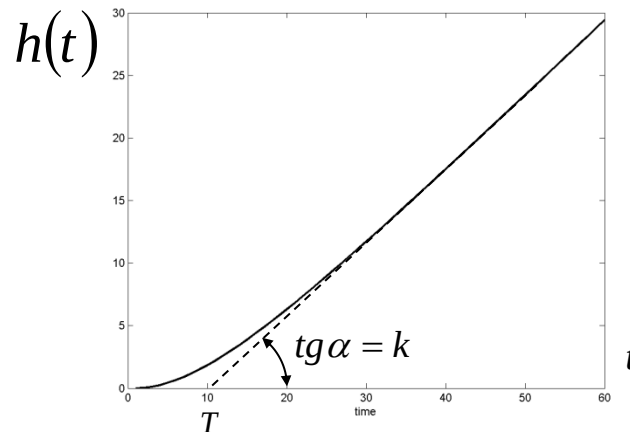
Odpowiedź Impulsowa:

$$k_i(t) = k(1 - e^{-t/T}) \mathbf{1}(t)$$



Odpowiedź skokowa:

$$h(t) = k(t - T(1 - e^{-t/T})) \mathbf{1}(t)$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element całkujący z inercją

$$\begin{aligned} K(s) \Big|_{s=j\omega} &= \frac{k}{s(sT+1)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{k}{j\omega(j\omega T+1)} = \frac{k}{\omega(-\omega T+j)} = \\ &= \frac{k(-\omega T-j)}{\omega(\omega^2 T^2+1)} = -\frac{kT}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{k}{\omega(1+\omega^2 T^2)} \end{aligned}$$

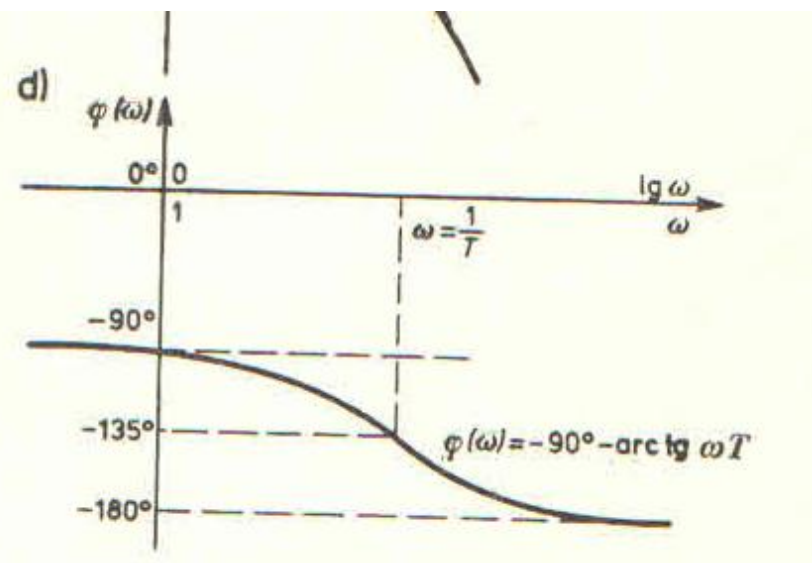
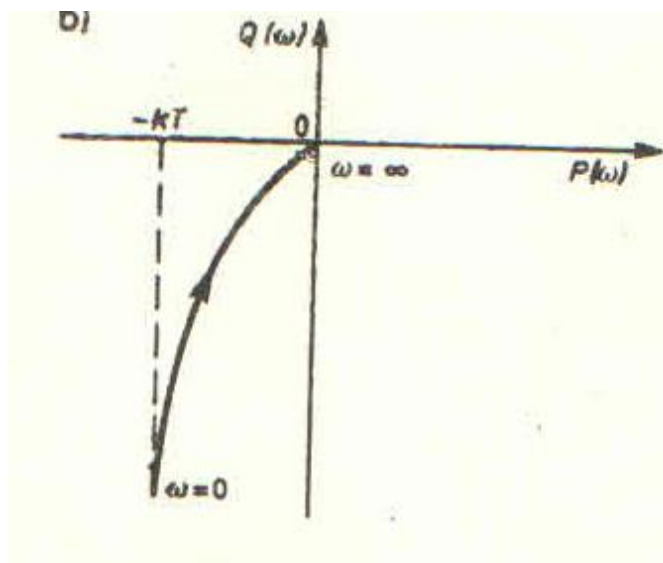
$$|K(j\omega)| = \frac{k}{\omega\sqrt{1+\omega^2 T^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{1}{\omega T},$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\omega T)$$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

$$K(j\omega) = -\frac{kT}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

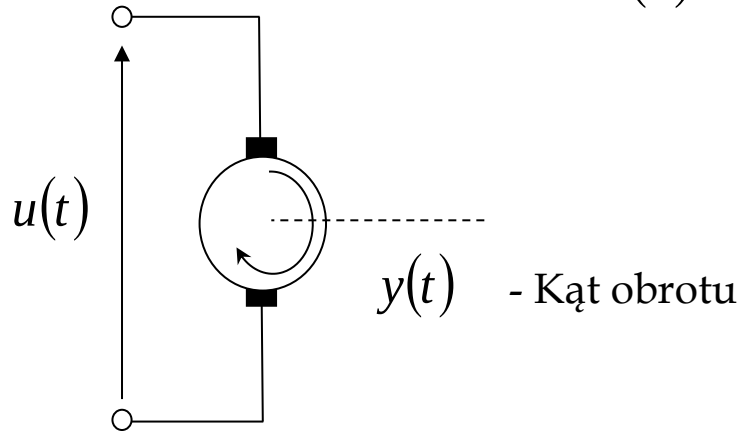
$$|K(j\omega)| = \frac{k}{\omega\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg(\omega T)$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element całkujący z inercją

○ Przykład



$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{s(L_w s + R_w)} = \frac{k}{s(Ts + 1)}$$

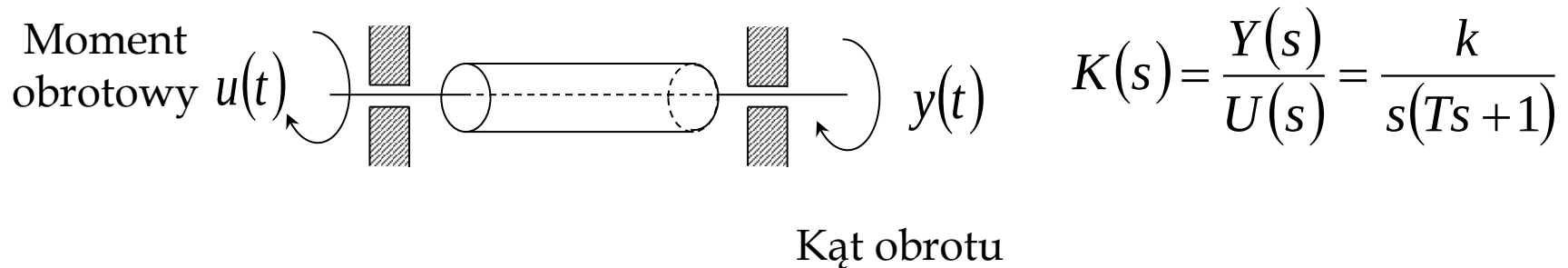
$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s(Ts + 1)}$$

gdzie: $k = \frac{\alpha}{R_w}$ $T = \frac{L_w}{R_w}$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element całkujący z inercją

○ Przykład



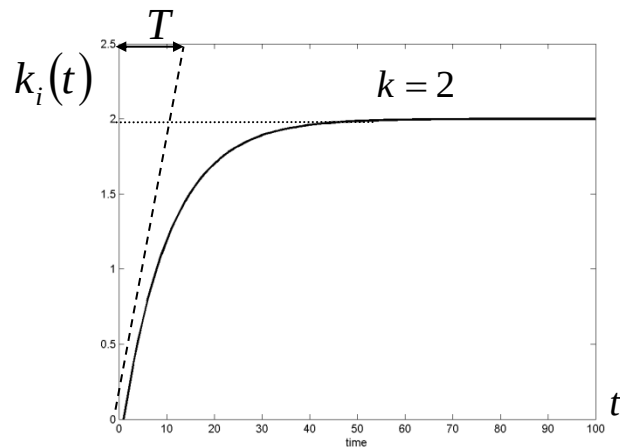
Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element całkujący z inercją

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \int_0^t u(\tau) d\tau \quad T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = ku(t) \quad K(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}, \quad T > 0$$

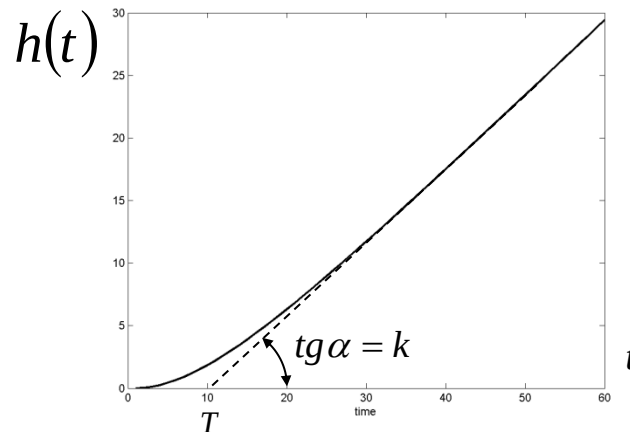
Odpowiedź Impulsowa:

$$k_i(t) = k(1 - e^{-t/T})\mathbf{1}(t)$$



Odpowiedź skokowa:

$$h(t) = k(t - T(1 - e^{-t/T}))\mathbf{1}(t)$$



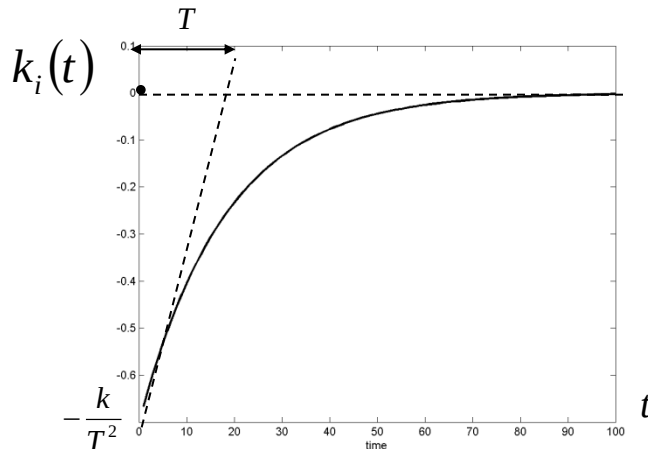
Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element różniczkujący z inercją

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

Odpowiedź impulsowa:

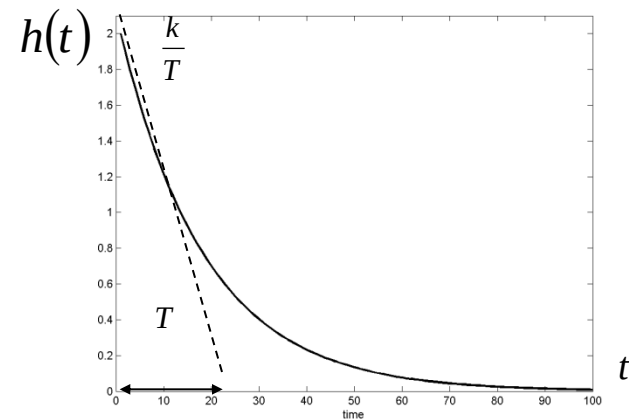
$$k_i(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-t/T} \mathbf{1}(t)$$



$$K(s) = \frac{ks}{Ts + 1}, \quad T > 0$$

Odpowiedź skokowa:

$$h(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} \mathbf{1}(t)$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element różniczkujący z inercją

$$K(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{ks}{sT+1}\bigg|_{s=j\omega} = \frac{jk\omega}{j\omega T+1} = \frac{k(1-j\omega T)j\omega}{1+\omega^2 T^2} =$$

$$= \frac{kT\omega^2}{1+\omega^2 T^2} + j \frac{k\omega}{1+\omega^2 T^2}$$

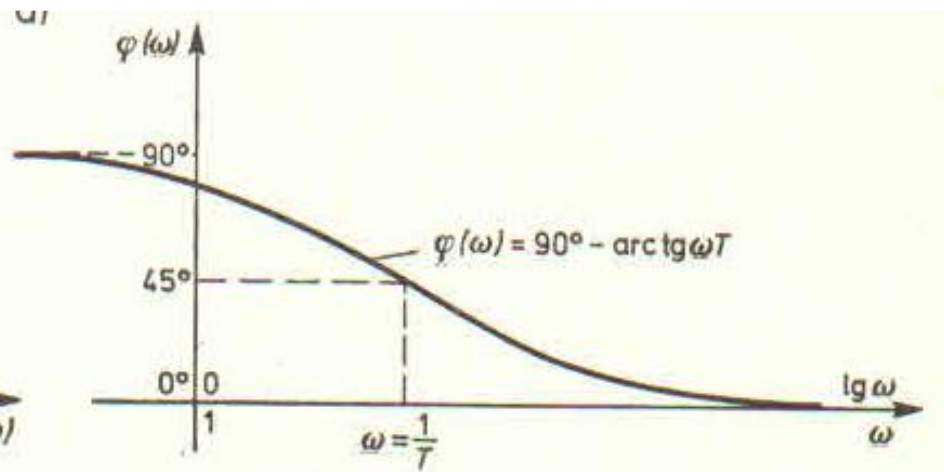
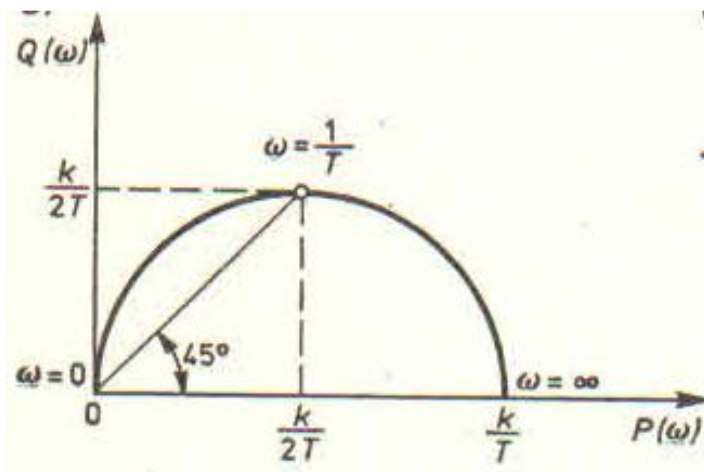
$$|K(j\omega)| = \frac{|k|\omega}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{1}{\omega T}, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\omega T)$$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

$$K(j\omega) = \frac{kT\omega^2}{1 + \omega^2 T^2} + j \frac{k\omega}{1 + \omega^2 T^2}$$

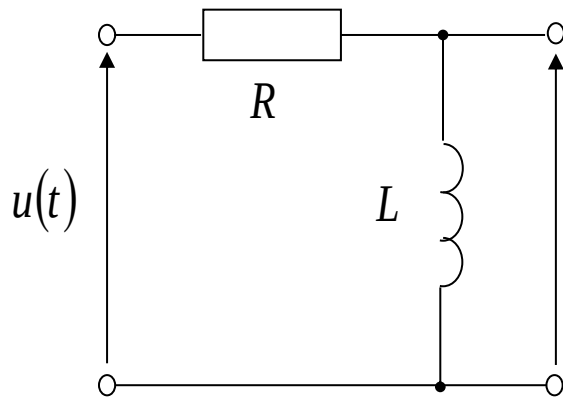
$$|K(j\omega)| = \frac{|k|\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\omega T)$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element różniczkujący z inercją

○ Przykład



$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

gdzie: L - inductancja

R - opór

$$y(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$L \frac{dy(t)}{dt} + Ry(t) = L \frac{du(t)}{dt}$$

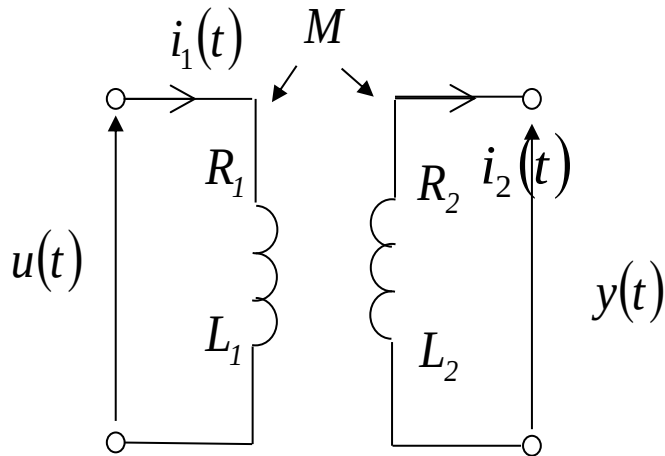
$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ls}{Ls + R} = \frac{\frac{L}{R}s}{\frac{L}{R}s + 1} = \frac{ks}{Ts + 1}$$

$$\text{gdzie: } k = \frac{L}{R}, \quad T = \frac{L}{R}$$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element różniczkujący z inercją

○ Przykład



$$u(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \quad \text{gdzie: } L_1 \text{ inductancja}$$

R_1 - opór

M - współczynnik transformacji

$$y(t) = M \frac{di_1(t)}{dt}$$

$$R_1 \frac{di_1(t)}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt}$$

$$R_1 y(t) + L_1 \frac{dy(t)}{dt} = M \frac{du(t)}{dt}$$

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ms}{L_1 s + R_1} = \frac{\frac{1}{R_1} s}{\frac{L}{R_1 M} s + 1} = \frac{ks}{Ts + 1} \quad \text{gdzie: } k = \frac{1}{R_1}, \quad T = \frac{L}{R_1 M}$$

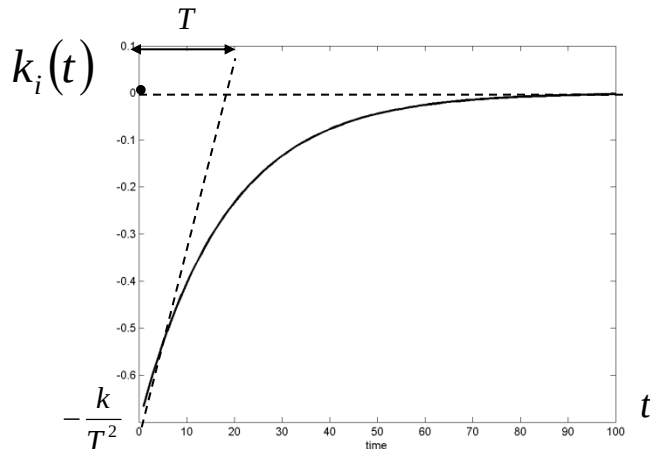
Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element różniczkujący z inercją

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

Odpowiedź impulsowa:

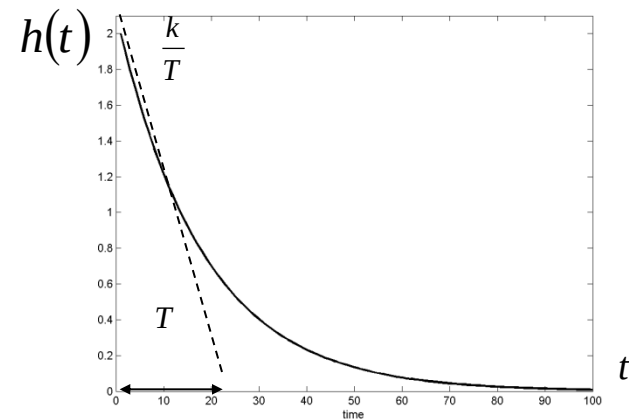
$$k_i(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-t/T} \mathbf{1}(t)$$



$$K(s) = \frac{ks}{Ts + 1}, \quad T > 0$$

Odpowiedź skokowa:

$$h(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} \mathbf{1}(t)$$



Element drugiego rzędu

$$a \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = du(t)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta \geq 0$ – *element inercyjny drugiego rzędu*

$\Delta < 0$ – *element oscylacyjny*

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element inercyjny drugiego rzędu

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t) \quad K(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad T_1, T_2 > 0$$

Odpowiedź impulsowa:

$$k_i(t) = k \left(\frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}) \right) \mathbf{1}(t), \quad T_1 \neq T_2$$

$$k_i(t) = k \left(\frac{1}{T} t e^{-t/T} \right) \mathbf{1}(t), \quad T_1 = T_2 = T$$

Odpowiedź skokowa:

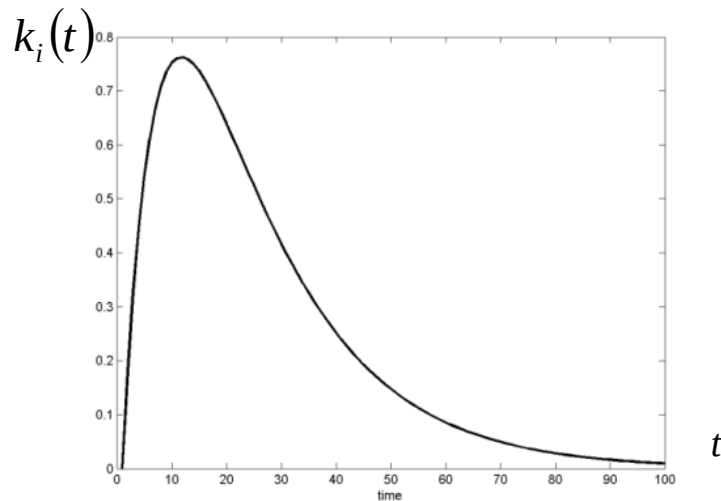
$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) \mathbf{1}(t), \quad T_1 \neq T_2$$

$$h(t) = k \left(1 - \left(\frac{1}{T} t + 1 \right) e^{-t/T} \right) \mathbf{1}(t), \quad T_1 = T_2 = T$$

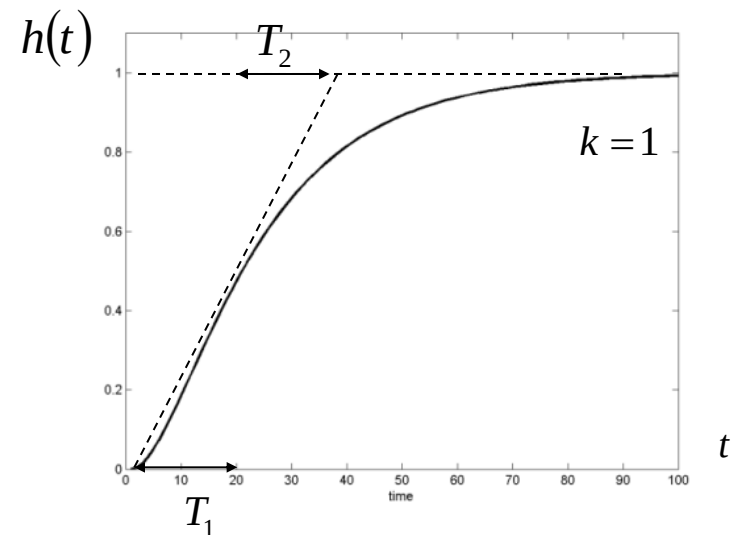
Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element inercyjny drugiego rzędu

Odpowiedź impulsowa:



Odpowiedź skokowa

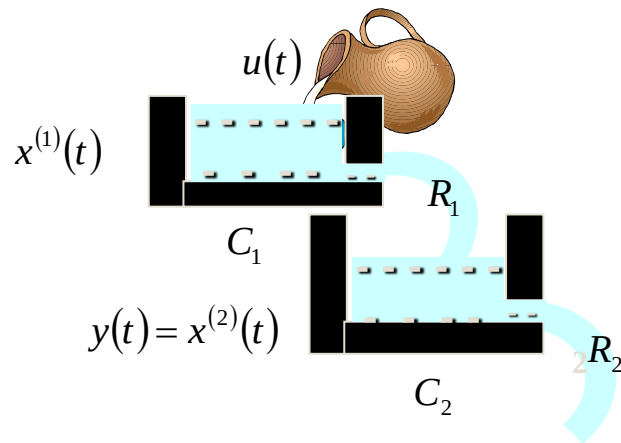


Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element inercyjny drugiego rzędu

○ Przykład

$$K(s) = \frac{\frac{C_1}{R_1 R_2}}{\left(\frac{C_1}{R_1} s + 1\right) \left(\frac{C_2}{R_2} s + 1\right)} = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$



gdzie: $k = \frac{C_1}{R_1 R_2}$

$$T_1 = \frac{C_1}{R_1}$$

$$T_2 = \frac{C_2}{R_2}$$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne - element oscylacyjny

$$T_n^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T_n \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t), \quad \omega_n = \frac{1}{T_n}, \quad 0 < \xi < 1$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi \omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = k\omega_n^2 u(t) \quad K(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Odpowiedź impulsowa:

$$k_i(t) = \frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\omega_n \xi t} \sin\left(\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)t\right) \mathbf{1}(t); \quad h(t) = k \left[1 - e^{-\omega_n \xi t} \cos \omega_0 t + \frac{\xi e^{-\omega_n \xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_0 t \right] \mathbf{1}(t);$$

$$k_i(t) = \frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\omega_n \xi t} \sin(\omega_0 t) \mathbf{1}(t);$$

$$\omega_0 = \left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)$$

$$h(t) = k \left[1 - \frac{e^{-\omega_n \xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi) \right] \mathbf{1}(t);$$

$$\omega_0 = \left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

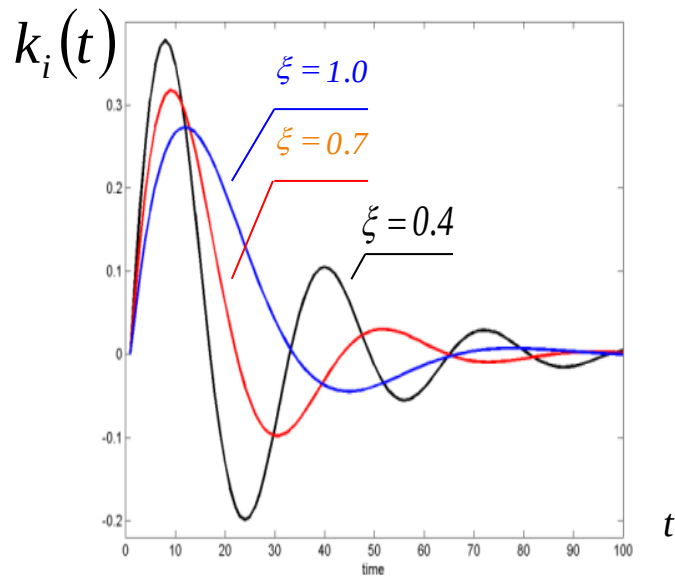
gdzie:

ξ - współczynnik tłumienia, ω_n - naturalna częstotliwość

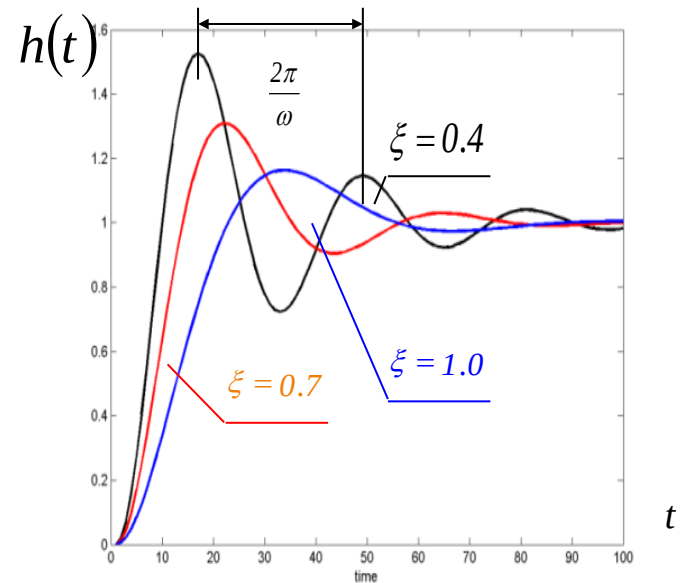
Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element oscylacyjny

Odpowiedź impulsowa:



Odpowiedź skokowa:



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne – element oscylacyjny

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= K(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Big|_{s=j\omega} = \frac{k\omega_n^2}{-\omega^2 + 2j\xi\omega_n\omega + \omega_n^2} = \\ &= \frac{k\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2} - j \frac{2k\omega_n^3\xi\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2} \end{aligned}$$

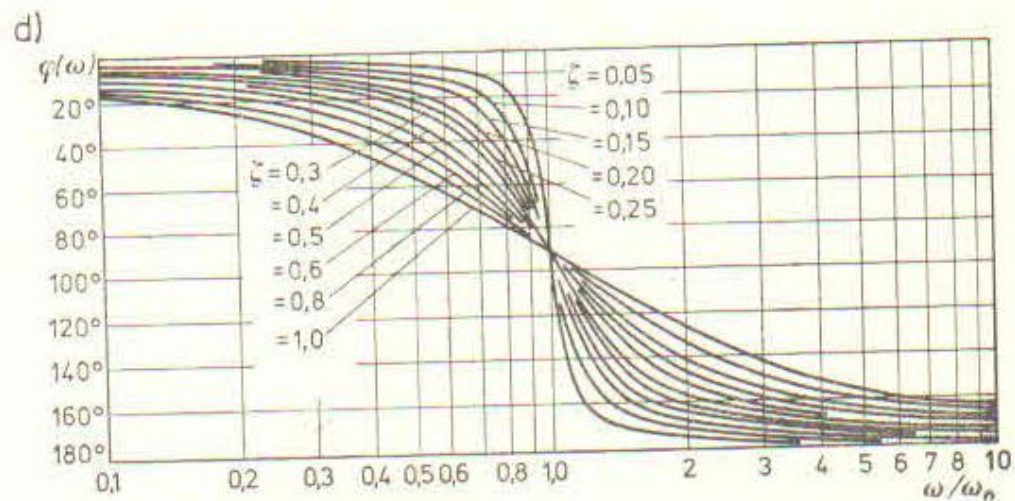
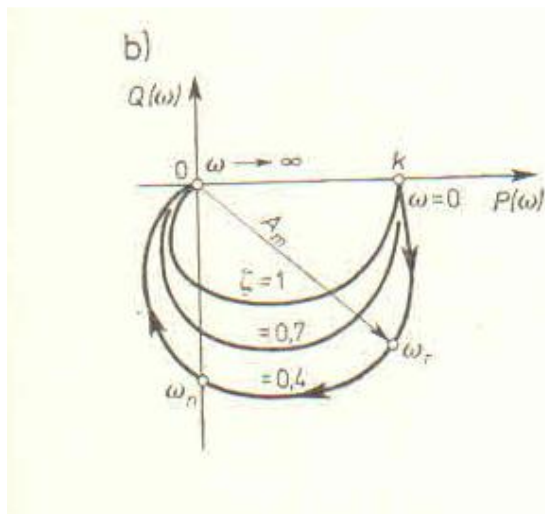
$$|K(j\omega)| = \frac{k\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

$$K(j\omega) = \frac{k\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2} - j \frac{2k\omega_n^3\xi\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}$$

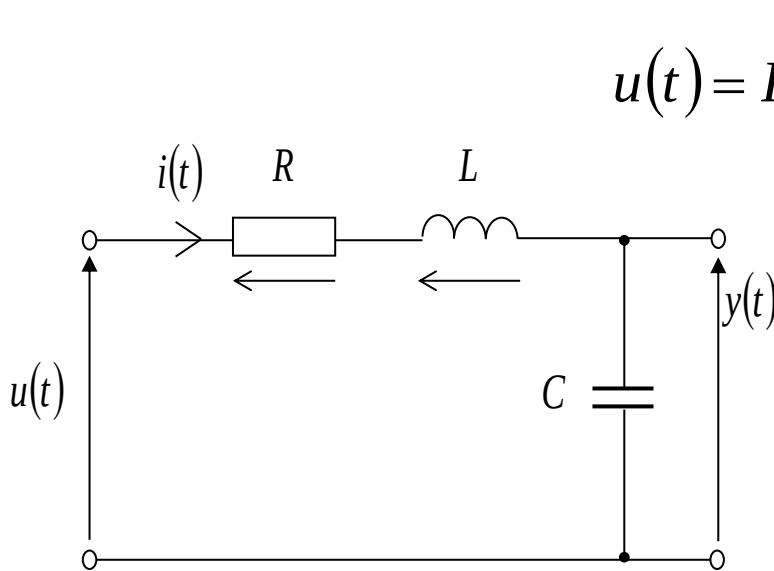
$$|K(j\omega)| = \frac{k\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element oscylacyjny

○ Przykład



$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

gdzie: L - indukcyjność
 R - opór
 C - pojemność

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = u(t)$$

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element oscylacyjny

○ Przykład

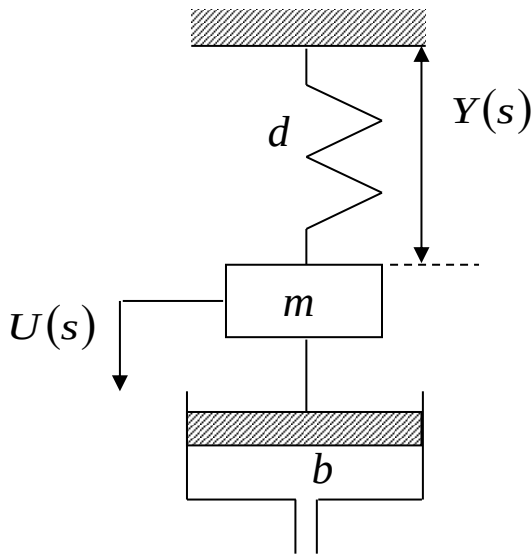
$$u(t) = dy(t) + b \frac{dy(t)}{dt} + m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

gdzie:

b - współczynnik tłumienia

d - współczynnik sprężystości

m - masa



$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$$

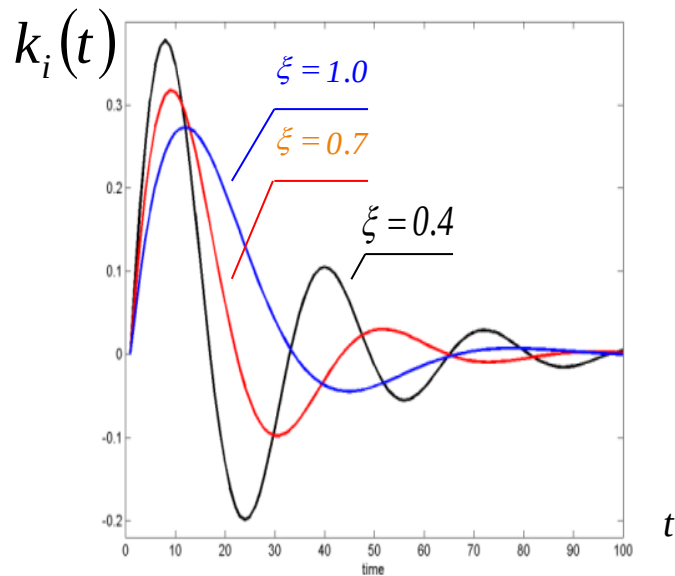
$$T_2 < 2\sqrt{T_1}$$

$$k = \frac{1}{d}, \quad T_1^2 = \frac{m}{d}, \quad T_2 = \frac{b}{d}$$

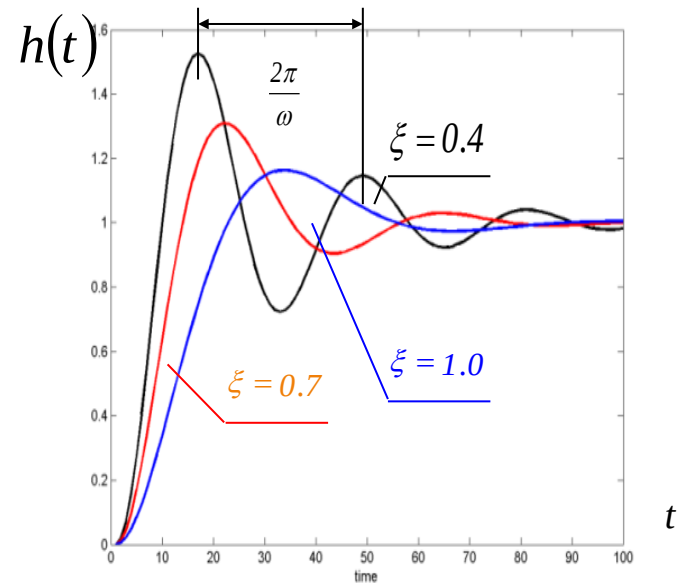
Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element oscylacyjny

Odpowiedź impulsowa:



Odpowiedź skokowa:



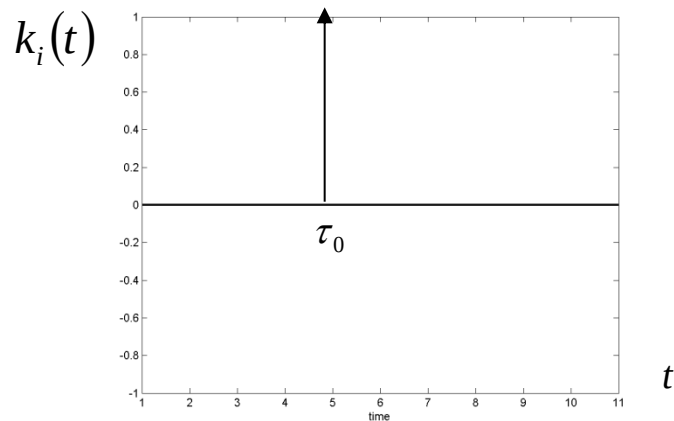
Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element opóźniający

$$y(t) = ku(t - \tau_0)$$

Odpowiedź impulsowa

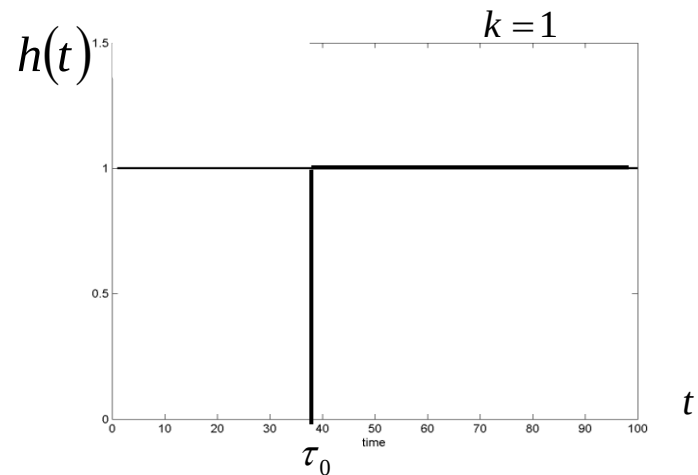
$$k_i(t) = k\delta(t - \tau_0)$$



$$K(s) = ke^{-s\tau_0}$$

Odpowiedź skokowa

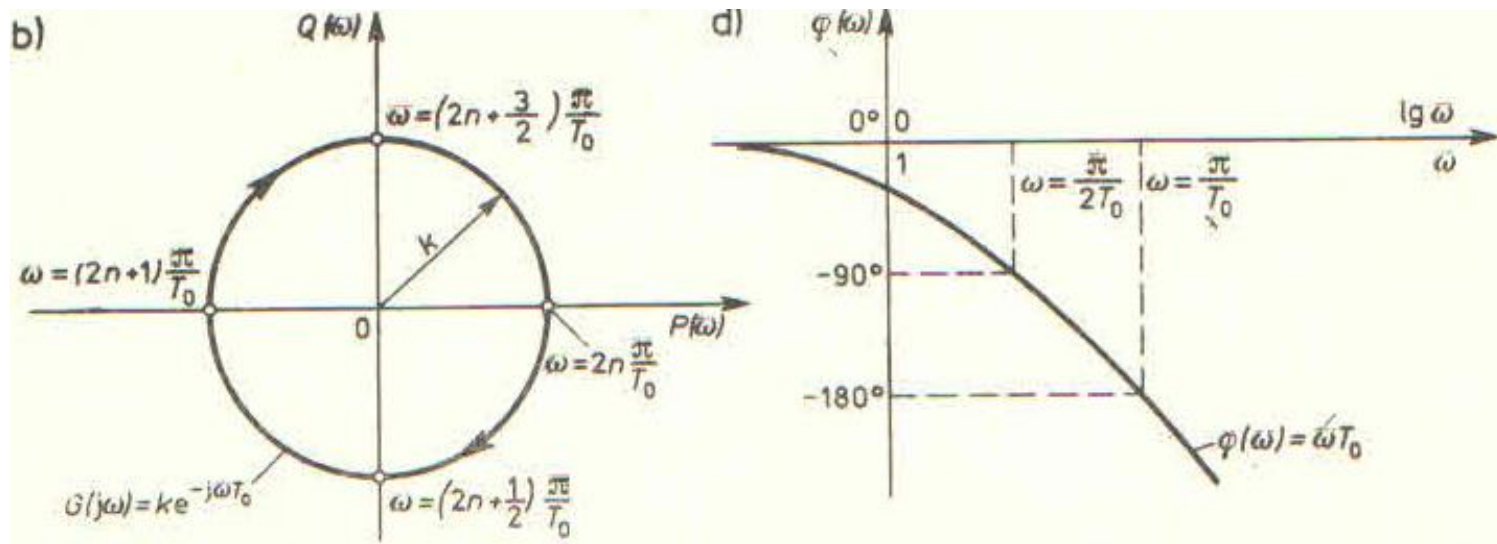
$$h(t) = k\mathbf{1}(t - \tau_0)$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element opóźniający

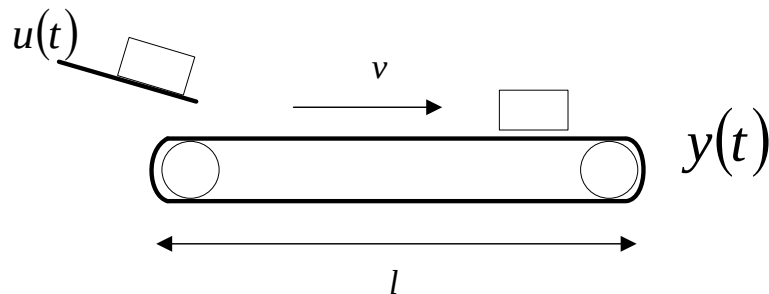
$$K(j\omega) = K(s) \Big|_{s=j\omega} = ke^{-s\tau_0} \Big|_{s=j\omega} = ke^{-j\omega\tau_0}$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element opóźniający

○ Przykład



$$y(t) = u(t - \tau_0)$$

gdzie: $\tau_0 = \frac{l}{v}$ - opóźnienie czasowe

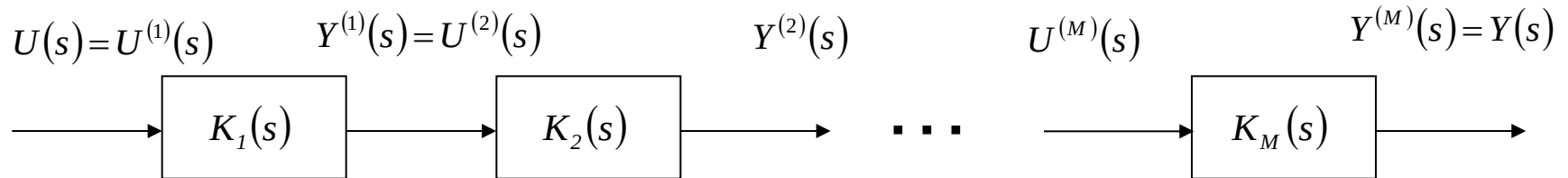
v - prędkość

l - długość

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-s\tau_0}$$

Łączenie elementów

∞ Połączenie szeregowe



$$Y^{(1)}(s) = K_1(s)U^{(1)}(s) = K_1(s)U(s)$$

$$Y^{(2)}(s) = K_2(s)U^{(2)}(s) = K_2(s)Y^{(1)}(s) = K_2(s)K_1(s)U^{(1)}(s)$$

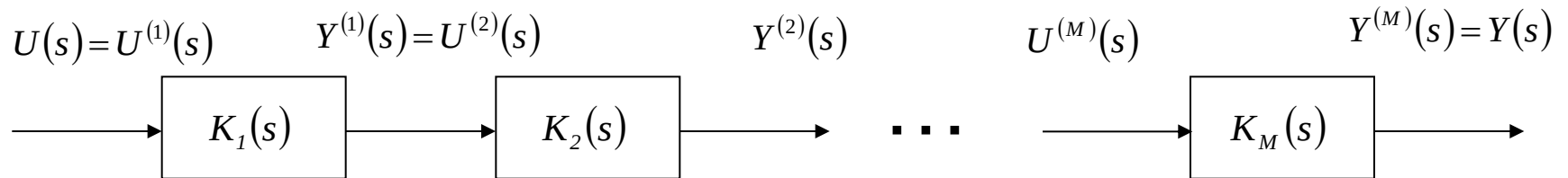
.....

$$Y^{(M)}(s) = Y(s) = K_M(s)U^{(M)}(s) = K_M(s)K_{M-1}(s)U^{(M-1)}(s) = K_M(s)K_{M-1}(s)\dots K_2(s)K_1(s)U^{(1)}(s) = K_M(s)K_{M-1}(s)\dots K_2(s)K_1(s)U(s)$$

$$K(s) = \prod_{m=1}^M K_m(s)$$

Łączenie elementów

∞ Połączenie szeregowe



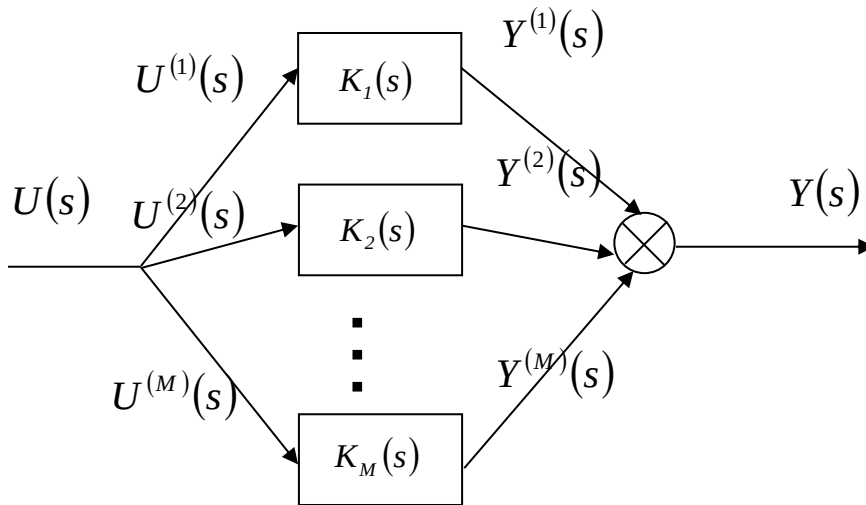
Transmitancja zastępcza:

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K_M(s)K_{M-1}(s)\dots K_2(s)K_1(s)$$

$$K(s) = \prod_{m=1}^M K_m(s)$$

Łączenie elementów

∞ Połączenia równoległe



$$U^{(1)}(s) = U^{(2)}(s) = \dots U^{(M)}(s) = U(s)$$

$$Y(s) = \sum_{i=1}^M Y^{(i)}(s)$$

$$Y^{(1)}(s) = K_1(s)U(s)$$

$$Y^{(2)}(s) = K_2(s)U(s)$$

.....

$$Y^{(M)}(s) = K_M(s)U(s)$$

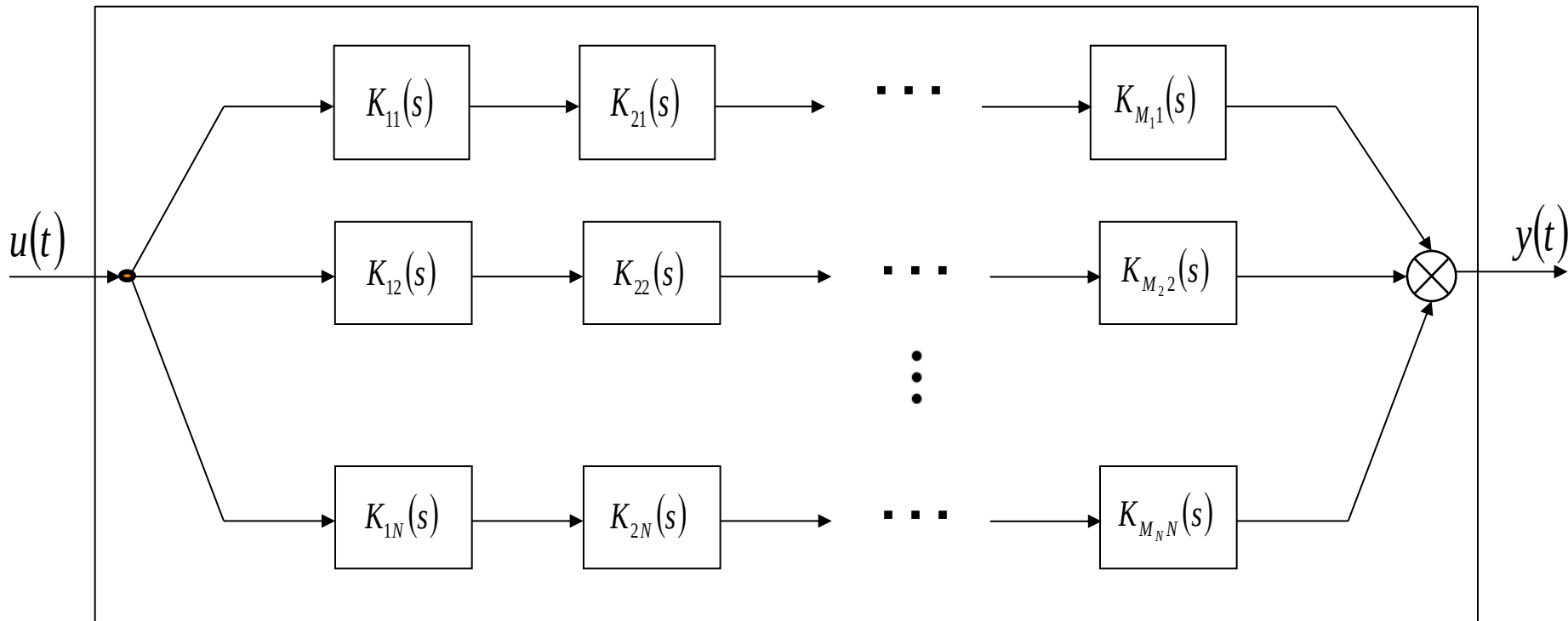
$$Y(s) = U(s) \sum_{i=1}^M K_i(s)$$

○ Transmitancja zastępcza:

$$K(s) = \sum_{m=1}^M K_m(s)$$

Typowe struktury

Struktura szeregowo-równoległa

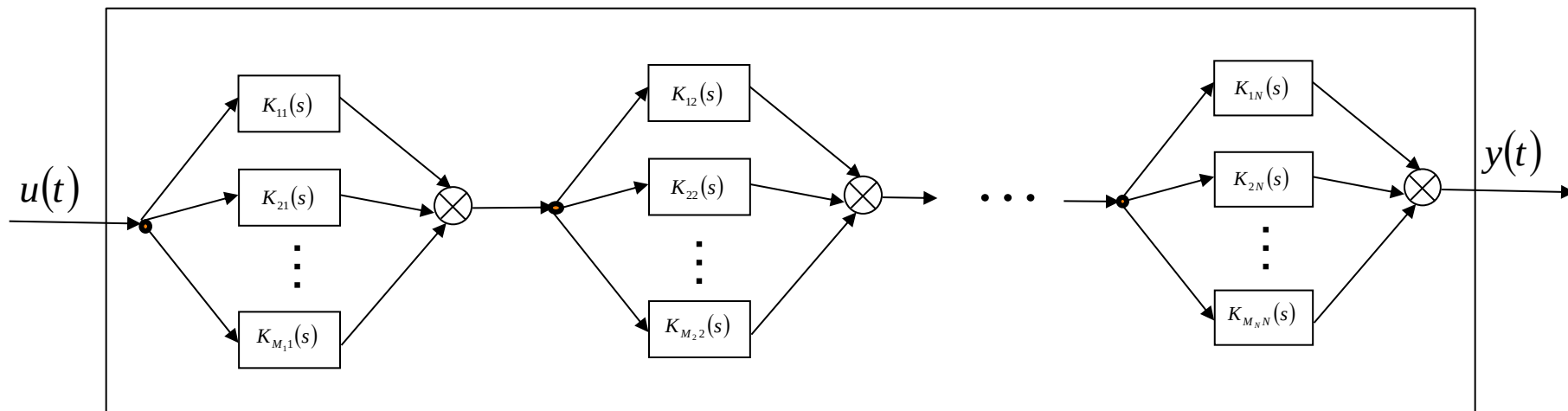


Transmitancja zastępcza:

$$K(s) = \sum_{n=1}^N \prod_{m=1}^{M_n} K_{nm}(s)$$

Typowe struktury

Struktura równoległo-szeregowa

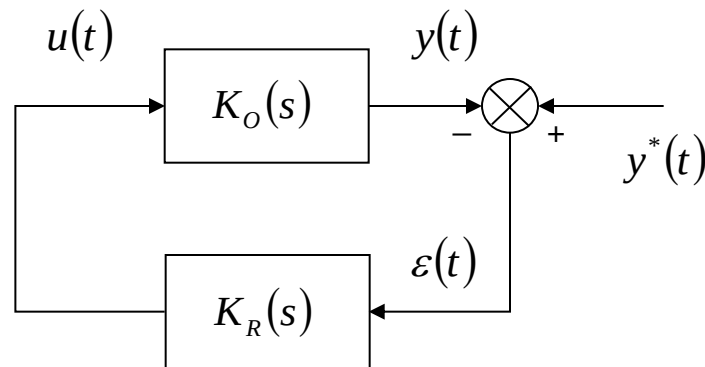


Transmitancja zastępcza:

$$K(s) = \prod_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} K_{mn}(s)$$

Łączenie elementów

∞ Układ ze sprzężeniem zwrotnym



$$Y(s) = K_o(s)U(s)$$

$$U(s) = K_R(s)E(s)$$

$$E(s) = Y^*(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = K_Z(s)Y^*(s)$$

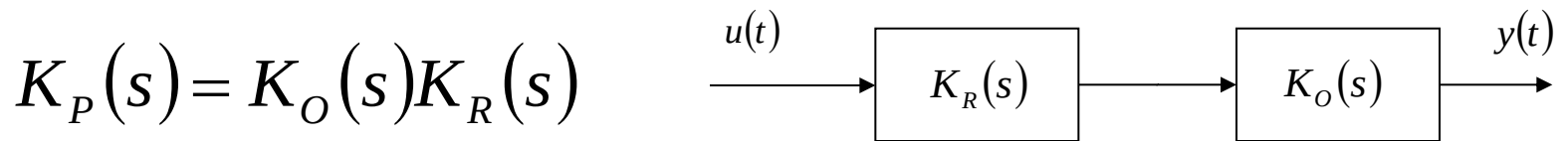
Łączenie elementów

∞ Układ ze sprzężeniem zwrotnym

$K_Z(s)$ - Transmitancja systemu zamkniętego

$$K_Z(s) = \frac{K_P(s)}{1 + K_P(s)}$$

$K_P(s)$ - Transmitancja układu otwartego

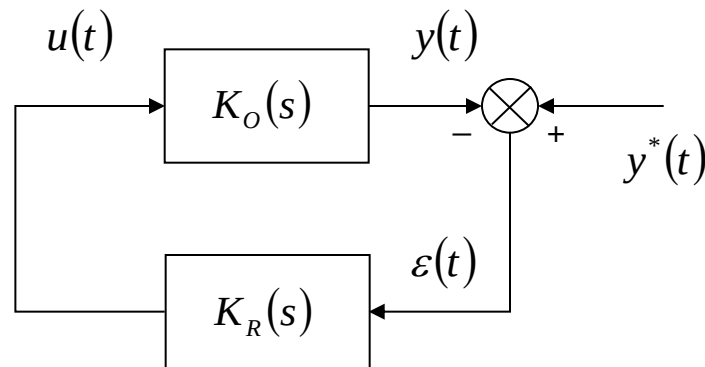


Ostatecznie:

$$K_Z(s) = \frac{Y(s)}{Y^*(s)} = \frac{K_O(s)K_R(s)}{1 + K_O(s)K_R(s)}$$

Łączenie elementów

∞ Układ ze sprzężeniem zwrotnym



$$Y(s) = K_o(s)U(s)$$

$$U(s) = K_R(s)E(s)$$

$$E(s) = Y^*(s) - Y(s)$$

$$E(s) = K_\varepsilon(s)Y^*(s)$$

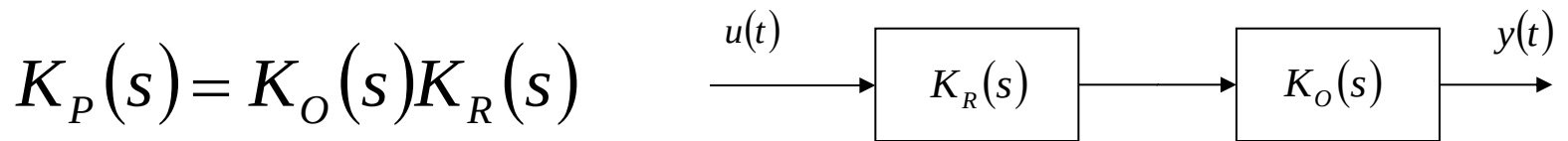
Łączenie elementów

∞ Układ ze sprzężeniem zwrotnym

$K_\varepsilon(s)$ - Transmitancja błędu układu zamkniętego

$$K_\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + K_P(s)}$$

$K_P(s)$ - Transmitancja układu otwartego



Ostatecznie:

$$K_\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{Y^*(s)} = \frac{1}{1 + K_O(s)K_R(s)}$$

Dziękuję za uwagę

