

Modele systemów dynamicznych



Wykład 5a. Sterowalność i obserwowalność systemów liniowych –
powiązania pomiędzy opisami

Opis przy pomocy równań stanu



$u(t)$ - Sygnał wejściowy (*ciągły*) $\dim u(t) = S$

$y(t)$ - Sygnał wyjściowy (*ciągły*) $\dim y(t) = L$

$x(t)$ - Wektor stanu systemu $\dim x(t) = K$

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A - (K \times K), B - (K \times S),$$

$$C - (L \times K), D - (L \times S)$$

u_n - Sygnał wejściowy (*dyskretny*) $\dim u_n = S$

y_n - Sygnał wyjściowy (*dyskretny*) $\dim y_n = L$

x_n - Wektor stanu systemu $\dim x_n = K$

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$

$$y_n = Cx_n + Du_n$$

$$A - (K \times K), B - (K \times S),$$

$$C - (L \times K), D - (L \times S)$$

Sterowalność względem stanu

Obiekt dyskretny

Układ nazywamy sterowalny względem stanu, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego x_0 istnieje ciąg sterowań, który przeprowadzi układ do zadanego stanu x^* .

Obiekt ciągły

Układ nazywamy sterowalny względem stanu, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego $x(t_0)$ istnieje sygnał sterujący, który przeprowadzi układ do zadanego stanu x^* .

Sterowalność – obiekt dyskretny

$$x_1 = Ax_0 + Bu_0$$

$$x_2 = Ax_1 + Bu_1 = A(Ax_0 + Bu_0) + Bu_1 = A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1$$

$$x_3 = Ax_2 + Bu_2 = A(A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1) + Bu_2 = A^3x_0 + A^2Bu_0 + ABu_1 + Bu_2$$

$\vdots$ po N krokach

$$x_N = Ax_{N-1} + Bu_{N-1} = A^N x_0 + A^{N-1}Bu_0 + A^{N-2}Bu_1 + \dots + Bu_{N-1} =$$

$$= A^N x_0 + \sum_{n=0}^{N-1} A^{N-1-n} Bu_n$$

$$x_N = x^* = A^N x_0 + \sum_{n=0}^{N-1} A^{N-1-n} Bu_n$$

$$x^* - A^N x_0 = \sum_{n=0}^{N-1} A^{N-1-n} Bu_n$$

Sterowalność – obiekt dyskretny

Po K krokach mamy:

$$x^* - A^K x_0 = \sum_{n=0}^{K-1} A^{K-1-n} B u_n$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$H \triangleq [B : AB : A^2 B : \dots : A^{K-1} B],$$

$$u \triangleq \begin{bmatrix} u_{K-1} \\ u_{K-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Wówczas:

$$x^* - A^K x_0 = H u \quad \text{Przy założeniu:} \quad \text{rz} H = K$$

$$\text{Możemy wyznaczyć:} \quad u = H^{-1} (x^* - A^K x_0)$$

Sterowalność – obiekt dyskretny

$$u = H^{-1} \left(x^* - A^K x_0 \right) \quad rzH = K$$

Układ liniowy opisany równaniami stanu

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n,$$

$$y_n = Cx_n + Du_n$$

$$\dim x = K$$

jest sterowalny względem stanu wtedy i tylko wtedy gdy rząd macierzy

$$H \overset{\Delta}{=} [B : AB : A^2B : \dots : A^{K-1}B]$$

jest równy K , tj.:

$$rzH = K$$

Sterowalność – obiekt dyskretny

Szczególny przypadek

$\dim u_n = S = 1$, wówczas macierz $B - (K \times 1)$ jest wektorem

Układ liniowy opisany równaniami stanu

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n,$$

$$y_n = Cx_n + Du_n$$

Jest sterowalny względem stanu jeżeli wektory:

$$B, AB, A^2B, \dots, A^{K-1}B$$

są liniowo niezależne.

Wówczas macierz H jest nieosobliwa i jest to równoważne warunkowi:

$$\det H = \det [B : AB : A^2B : \dots : A^{K-1}B] \neq 0$$

Sterowalność – obiekt dyskretny

Przykład. Rozważmy dwuwymiarowy układ liniowy opisany równaniem stanu

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n,$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Układ chcemy przeprowadzić

$$\text{ze stanu } x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ do stanu } x^* = x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sterowalność – obiekt dyskretny

Badamy sterowalność

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Czyli macierz $H = [B : AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ a jej wyznacznik

$$\det H = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = 0 \times (-3) - 1 \times 1 = -1 \neq 0$$

a zatem układ jest sterowalny.

Sterowalność – obiekt dyskretny

Teraz możemy wyznaczyć sterowanie

$$u = H^{-1}(x^* - A^2 x_0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \dots = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Sterowalność względem wyjścia

Obiekt dyskretny

Układ nazywamy sterowalny względem wyjścia, jeżeli dla dowolnego wyjścia początkowego y_0 istnieje ciąg sterowań, który przeprowadzi układ do zadanego wyjścia y^* .

Obiekt ciągły

Układ nazywamy sterowalny, jeżeli dla dowolnego wyjścia początkowego $y(t_0)$ istnieje sygnał sterujący, który przeprowadzi układ do zadanego wyjścia y^* .

Sterowalność – obiekt dyskretny

Po K krokach sterowania otrzymujemy stan:

$$x_K = A^K x_0 + \sum_{n=0}^{K-1} A^{K-1-n} B u_n$$

Odpowiednio wyjście:

$$y_K = y^* = C x_K + D u_K = C \left(A^K x_0 + \sum_{n=0}^{K-1} A^{K-1-n} B u_n \right) + D u_K$$

czyli

$$y^* - C A^K x_0 = \left(\sum_{n=0}^{K-1} C A^{K-1-n} B u_n \right) + D u_K$$

Sterowalność – obiekt dyskretny

Przyjmijmy oznaczenia:

$$Q \triangleq [CB : CAB : CA^2B : \dots : CA^{K-1}B : D], u \triangleq \begin{bmatrix} u_{K-1} \\ u_{K-2} \\ \vdots \\ u_0 \\ u_K \end{bmatrix}$$

Poprzednie równanie przyjmie postać:

$$y^* - CA^K x_0 = Qu$$

Przy założeniu $\text{rz}Q = K + 1$ z powyższego możemy wyznaczyć

$$u = Q^{-1}(y^* - CA^K x_0)$$

Sterowalność – obiekt dyskretny

$$u = Q^{-1}(y^* - CA^K x_0) \quad rzQ = K + 1$$

Układ liniowy opisany równaniami stanu

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n,$$

$$y_n = Cx_n + Du_n$$

$$\dim x = K$$

jest sterowalny względem wyjścia wtedy i tylko wtedy gdy rząd macierzy

$$Q \triangleq [CB : CAB : CA^2B : \dots : CA^{K-1}B : D]$$

jest równy $K+1$, tj.:

$$rzQ = K + 1$$

Sterowalność – obiekt dyskretny

Szczególny przypadek

$\dim u_n = S = \dim y_n = L = 1$, wówczas macierz B – jest wektorem ($K \times 1$) a macierz D wektorem ($1 \times K$)

Układ liniowy opisany równaniami stanu

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n,$$

$$y_n = Cx_n + Du_n$$

Jest sterowalny względem wyjścia jeżeli wektory:

$$CB, CAB, CA^2B, \dots, CA^{K-1}B, D$$

są liniowo niezależne.

Wówczas macierz Q jest nieosobliwa i jest to równoważne warunkowi:

$$\det Q \triangleq \det[CB : CAB : CA^2B : \dots : CA^{K-1}B : D] \neq 0$$

Obserwowalność – obiekt dyskretny

Układ liniowy dyskretny stacjonarny jest obserwowalny jeżeli istnieje taka liczba obserwacji N , że na podstawie znajomości ciągu sterowań $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ oraz odpowiedzi układu $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ istnieje możliwość jednoznacznego wyznaczenia stanu początkowego x_0 .

Dla układu liniowego opisanego równaniami stanu

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n,$$

$$y_n = Cx_n + Du_n$$

po N krokach sterowania $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ otrzymujemy stan

$$x_{N+1} = A^N x_0 + \sum_{n=0}^{N-1} A^{N-1-n} B u_n$$

Obserwowalność – obiekt dyskretny

W konsekwencji wyjście układu po N krokach wyjście

$$y_N = Cx_N + Du_N = C \left(A^N x_0 + \sum_{n=0}^{N-1} A^{N-1-n} B u_n \right) + Du_N$$

Czyli dla kolejnych kroków mamy:

$$y_0 = Cx_0 + Du_0$$

$$y_1 = CAx_0 + CBu_0 + Du_1$$

$$y_2 = CA^2x_0 + CABu_0 + CBu_1 + Du_2$$

$$\vdots$$

$$y_N = CA^N x_0 + C \left(\sum_{n=0}^{N-1} A^{N-1-n} B u_n \right) + Du_N$$

Obserwowalność – obiekt dyskretny

Oznaczmy przez:

$$z_N = y_N - C \left(\sum_{n=0}^{N-1} A^{N-1-n} B u_n \right) - D u_N, \quad 0 = 1, 2, \dots, N$$

Korzystając z powyższego oznaczenia po $K-1$ krokach mamy:

$$\begin{aligned} z_0 &= C x_0 \\ z_1 &= C A x_0 \\ z_2 &= C A^2 x_0 \\ \vdots & \\ z_{K-1} &= C A^{K-1} x_0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{oznaczmy} \\ \text{przez} \end{array}$$

$$z \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{K-1} \end{bmatrix}, \quad G \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{K-1} \end{bmatrix}$$

Obserwowalność – obiekt dyskretny

Poprzedni układ równań przyjmuje postać

$$z = Gx_0$$

Z powyższego równania, przy założeniu że

$$rzG = K$$

możemy wyznaczyć x_0

$$x_0 = G^{-1}z$$

Na tej podstawie możemy podać warunek konieczny obserwowalności

Obserwowalność – obiekt dyskretny

Układ liniowy opisany równaniami stanu

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n,$$

$$y_n = Cx_n$$

$$\dim x = K$$

jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy gdy rząd macierzy

$$G \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{K-1} \end{bmatrix}$$

jest równy K , tj.: $\text{rz}G = K$

Obserwowalność – obiekt dyskretny

Szczególny przypadek dla obiektu gdy wejście i wyjście jest jednowymiarowe tj.: $\dim u = S = \dim y = L = 1$

W tym przypadku układ liniowy jest obserwowalny gdy macierz

$$G = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{K-1} \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa, czyli wyznacznik macierzy G jest różny od zera, tj.: $\det G \neq 0$

Obserwowalność – obiekt dyskretny

Przykład. Rozważmy dwuwymiarowy obiekt liniowy opisany równaniem stanu

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n,$$

$$y_n = Cx_n + Du_n$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad -1], D = 0$$

W dwóch taktach dla $u_0 = 5, u_1 = 2$

wyście układu wynosiło odpowiednio $y_0 = 0, y_1 = 1$

Obserwowalność – obiekt dyskretny

Badamy obserwowalność

$$C = [1 \quad -1]$$

$$CA = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= [2 \quad 4]$$

$$\text{zatem } G = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det G = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \times 4 - 2 \times (-1) = 6 \neq 0$$

Ponieważ $\det G \neq 0$ to układ jest obserwowalny

Obserwowalność – obiekt dyskretny

Teraz na podstawie $u_0 = 5, u_1 = 2$ oraz $y_0 = 0, y_1 = 1$ wyznaczmy x_0

$$z_n = y_n - C \left(\sum_{n=0}^{N-1} A^{N-1-n} B u_n \right) - D u_n, n = 1, 2, \dots, N$$

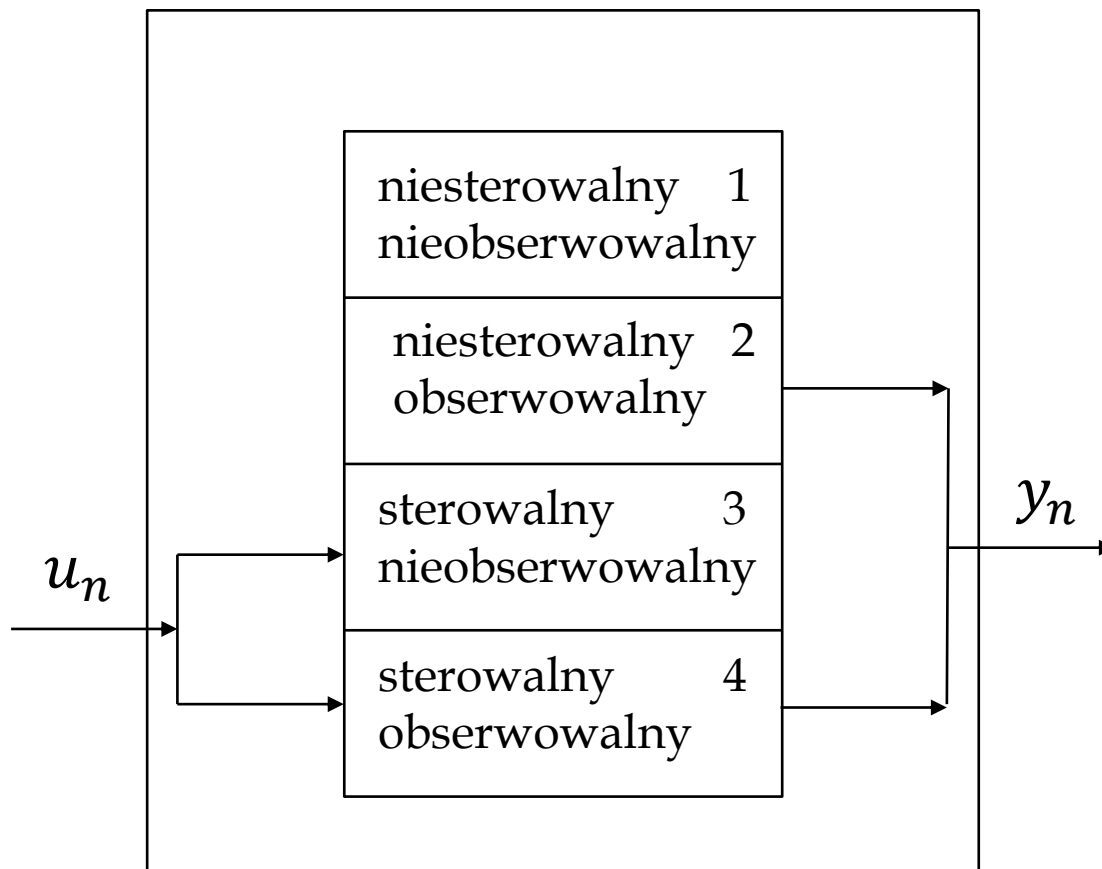
$$z_0 = y_0 = 0$$

$$z_1 = y_1 - C B u_0 = 1 - [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 5 = 1 + 5 = 6$$

$$z = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = G^{-1} z = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sterowalność i obserwowalność



Postać kanoniczna Kalmana układu macierzy

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n,$$

$$y_n = Cx_n + Du_n$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{31} & A_{32} \\ 0 & A_{44} & 0 & A_{42} \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad C_4 \quad 0 \quad C_2]$$

Równanie stanu $\rightarrow$ Transmitancja

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \mathcal{L}[Ax(t) + Bu(t)], \quad x(0) = 0_K$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[Cx(t) + Du(t)]$$

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = BU(s) \quad | \times (sI - A)^{-1}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \qquad X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s)$$

Oznaczmy przez:

$$K(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$Y(s) = K(s)U(s)$$

Transmitancja
układu

Równanie stanu → Transmitancja

Korzystając z postaci kanonicznej, tj.:

$$A = \begin{bmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{31} & A_{32} \\ 0 & A_{44} & 0 & A_{42} \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad C_4 \quad 0 \quad C_2]$$

$$K(s) = C(sI - A)^{-1}B + D =$$

$$\begin{bmatrix} M & P \\ 0 & N \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M^{-1} & M^{-1}PN^{-1} \\ 0 & N^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= [0 \quad C_4 \quad 0 \quad C_2] \begin{bmatrix} sI - A_{33} & A_{34} & A_{31} & A_{32} \\ 0 & sI - A_{44} & 0 & A_{42} \\ 0 & 0 & sI - A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & sI - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D =$$

$$= [0 \quad C_4 \quad 0 \quad C_2] \begin{bmatrix} [sI - A_{33}]^{-1} & * & * & * \\ 0 & [sI - A_{44}]^{-1} & * & * \\ 0 & 0 & [sI - A_{11}]^{-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & [sI - A_{22}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D =$$

$$= C_4 [sI - A_{44}]^{-1} B_4 + D$$

Typowe opisy

Relacja pomiędzy opisami

Przykład:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t) \qquad \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

ZMIENNE STANU

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE/RÓŻNICOWE

$$K(s) = \frac{1}{s+1}$$

TRANSMITANCJA

Typowe opisy

Relacja pomiędzy opisami

Przykład:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t), \quad y(0) = y'(0) = u(0) = 0$$

Transformata Laplace' a:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) \right] = \mathcal{L} \left[\frac{du(t)}{dt} + 2u(t) \right]$$

Transmitancja:

$$K(s) = \frac{s+2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s+2}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

Typowe opisy

Relacja pomiędzy opisami

Przykład cd.:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t), \quad y(0) = 0$$

Transformata Laplace'a

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt} + y(t)\right] = \mathcal{L}[u(t)]$$

Transmitancja:

$$K(s) = \frac{1}{s+1}$$

Dziękuję za uwagę

