

Modele systemów dynamicznych



Wykład 6. Stabilność układów dynamicznych

Punkt równowagi

Układ jest stabilny jeżeli wytrącony ze stanu równowagi zostanie sprowadzony do stanu równowagi

Rozważmy obiekt dynamiczny (autonomiczny – nie poddany wymuszeniom)

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), \dim x = K$$

Punkt równowagi x_r

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x_r) = 0_K,$$

Obiekt liniowy

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), A - \text{macierz}(K \times K), \det A \neq 0$$

$$Ax_r = 0_K$$

Stabilność układu - obiekty ciągłe

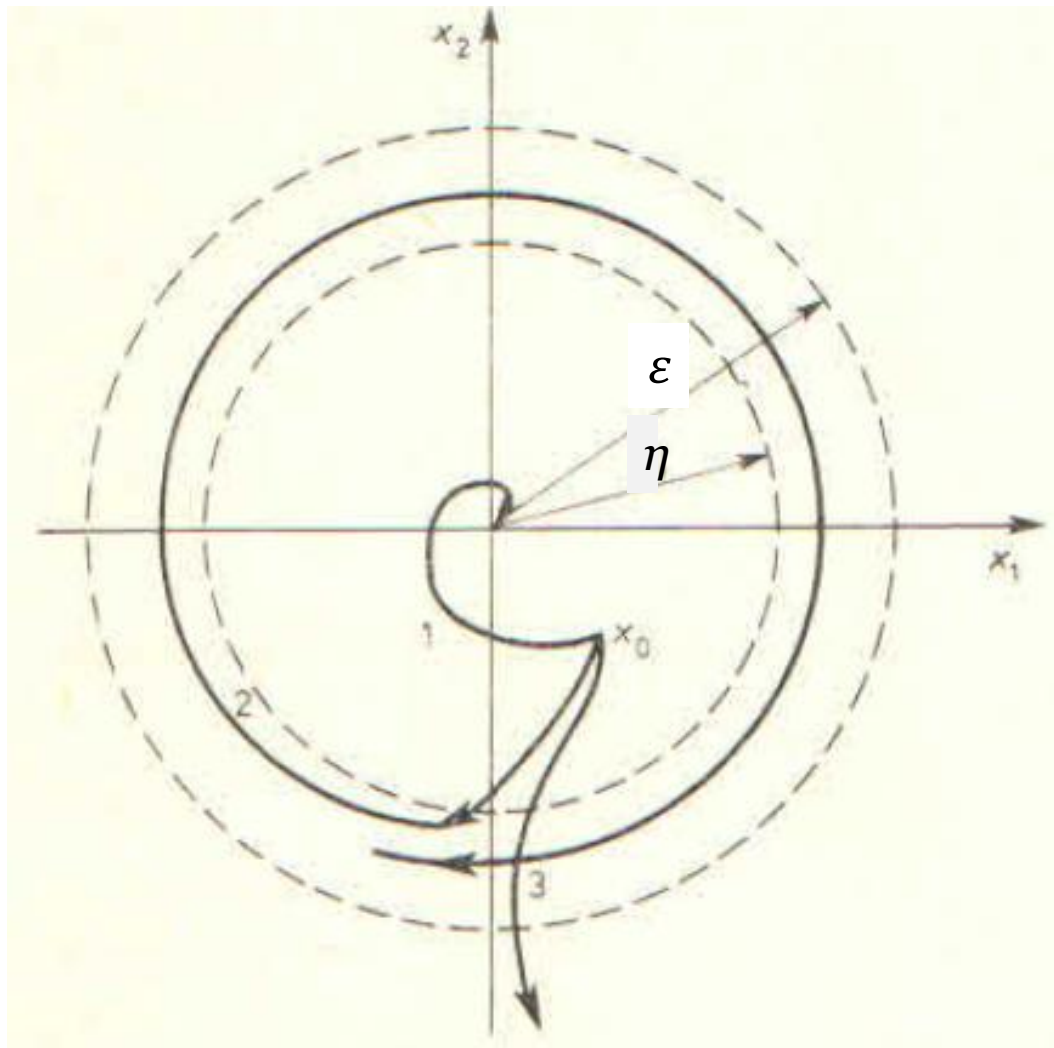
Układ jest stabilny jeżeli wytrącony ze stanu równowagi zostanie sprowadzony do stanu równowagi

Definicja stabilności w sensie Lapunowa

Punkt równowagi $x_r = 0$ nazywamy stabilnym jeżeli
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0$, że trajektorie rozpoczynające się w punkcie
 $x_0 \in O(x_r, \eta)$ dla dowolnej chwili t , $x(t) \in O(x_r, \varepsilon)$

Jeżeli ponadto $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ to punkt $x_r = 0$ nazywamy
asymptotycznie stabilnym

Stabilność układu



Przykładowy przebieg trajektorii:

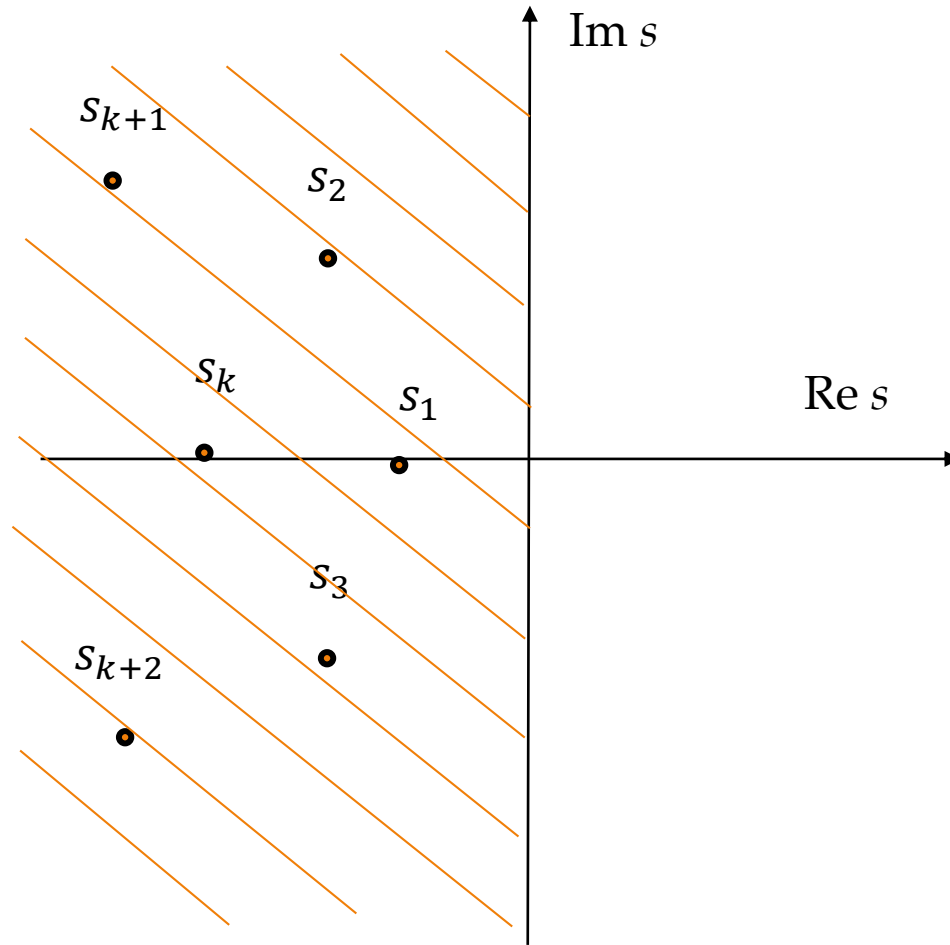
- 1 - Układ stabilny asymptotycznie
- 2 - Układ stabilny, ale nie asymptotycznie
- 3 - Układ niestabilny

Stabilność układu

Warunek konieczny i dostateczny stabilności układów ciągłych liniowych.

Układ liniowy stacjonarny opisany równaniem $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ jest stabilny wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie wartości własne macierzy A mają niedodatnie części rzeczywiste i każda wartość własna o zerowej części rzeczywistej jest pierwiastkiem jednokrotnym wielomianu minimalnego macierzy A .

Stabilność układu



Stabilność układu

Opis układu: $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), x_0$

Rozwiązanie: $x(t) = e^{At} x_0$, dla pierwiastków jednokrotnych

$$\Psi(s) = \det[sI - A] = (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_K),$$

$s_1, s_2, \dots, s_K$ – jednokrotne pierwiastki równania $\Psi(s) = 0$

K – liczba różnych pierwiastków,

$$x(t) = \sum_{k=1}^K z_k e^{s_k t} x_0$$

Gdzie:

$$z_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^K \frac{A - Is_i}{s_k - s_i}$$

Stabilność układu

Opis układu: $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), x_0$

Rozwiązanie: $x(t) = e^{At} x_0$, dla pierwiastków wielokrotnych

$$\Psi(s) = \det[sI - A] = (s - s_1)^{m_1} (s - s_2)^{m_2} \cdots (s - s_r)^{m_r}, \sum_{k=1}^r m_k = m \leq K$$

$s_1, s_2, \dots, s_r$ – pierwiastki równania $\Psi(s) = 0$

r – liczba różnych pierwiastków,

m_k – krotność k – tego pierwiastka, $k = 1, 2, \dots, r$

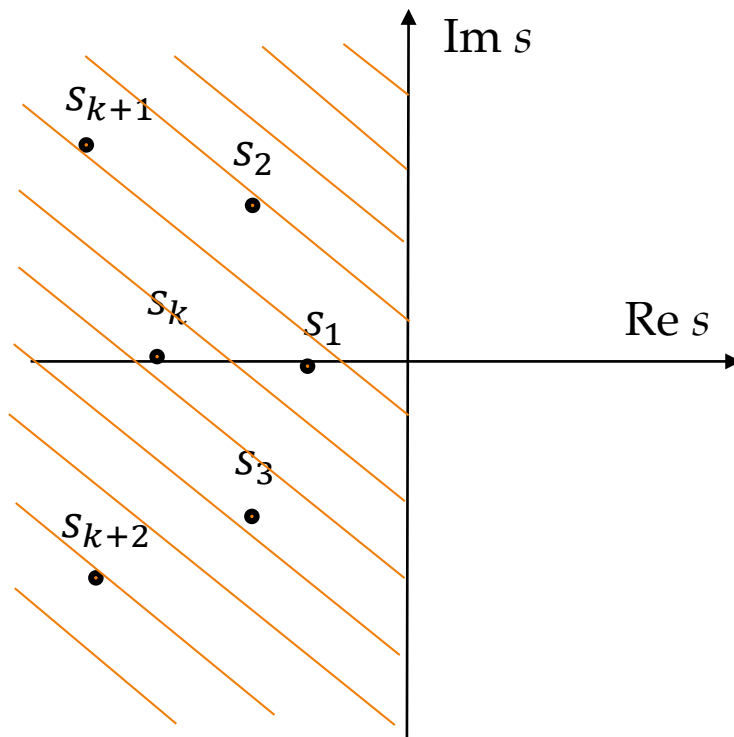
$$x(t) = \sum_{k=1}^r \left[z_{k1} + z_{k2}t + \cdots + z_{km_k} t^{m_k-1} \right] e^{s_k t} x_0$$

Gdzie:

$$z_{kj} = \sum_{i=j-1}^{m_k-1} \frac{\Psi_k(s)}{(i-j+1)!(j-1)!} \frac{d^{i-j+1}}{ds^{i-j+1}} \left[\frac{1}{\Psi(s)} \right]_{s=s_k} [A - s_k I]^i, \Psi_k(s) = \frac{\Psi(s)}{(s - s_k)^{m_k}}$$

Stabilność układu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^p |e^{s_k t}| = \begin{cases} 0 & \text{dla } \operatorname{Re} s_k < 0 \text{ i } p < \infty \text{ (p - skończone)} \\ 1 & \text{dla } \operatorname{Re} s_k = 0 \text{ i } p = 0, \\ \infty & \text{dla } \operatorname{Re} s_k \geq 0 \text{ i } p > 0. \end{cases}$$



Stabilność układu

$$K(s) = \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0}, \Delta = a_1^2 - 4a_0, s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$K(s) = \frac{k}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{k}{s_1-s_2} \frac{1}{(s-s_1)} - \frac{k}{s_1-s_2} \frac{1}{(s-s_2)}$$

$1^0 \Delta > 0, s_1, s_2$ – pierwiastki rzeczywiste

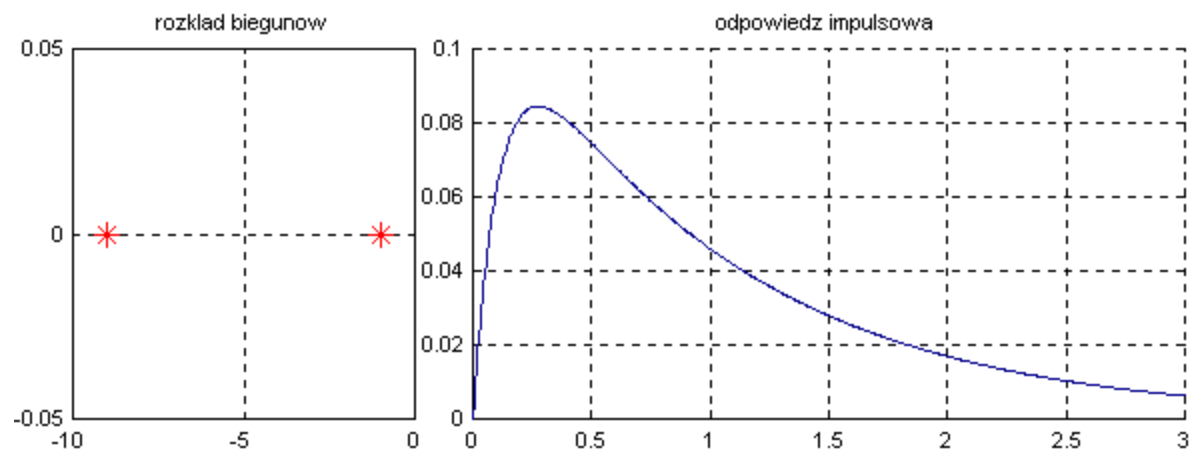
$$k_i(t) = L^{-1} \left[\frac{k}{s_1-s_2} \frac{1}{(s-s_1)} - \frac{k}{s_1-s_2} \frac{1}{(s-s_2)} \right] = \frac{k}{s_1-s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \mathbf{1}(t)$$

$$s_1 < 0, s_2 < 0, \lim_{t \rightarrow \infty} k_i(t) = 0$$

$$s_1 < 0, s_2 > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} k_i(t) = -(0 - \infty) = \infty$$

$$s_1 > 0, s_2 < 0, \lim_{t \rightarrow \infty} k_i(t) = \infty - 0 = \infty$$

$$s_1 > 0, s_2 > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} k_i(t) = \pm(\infty - \infty)$$



Stabilność układu

2^0 $\Delta = 0, s_1 = s_2$ – jeden pierwiatek podwójny

$$K(s) = \frac{k}{(s - s_1)^2}, k_i(t) = L^{-1} \left[\frac{k}{(s - s_1)^2} \right] = k t e^{s_1 t} 1(t)$$

$$s_1 < 0, \lim_{t \rightarrow \infty} k_i(t) = 0$$

$$s_1 \geq 0, \lim_{t \rightarrow \infty} k_i(t) = \infty$$

Stabilność układu

3 $\Delta < 0$, s_1, s_2 – pierwiastki urojone

$$s_1 = \operatorname{Re} s_1 + j \operatorname{Im} s_1 = \alpha + j\omega, s_2 = \operatorname{Re} s_2 - j \operatorname{Im} s_2 = \alpha - j\omega$$

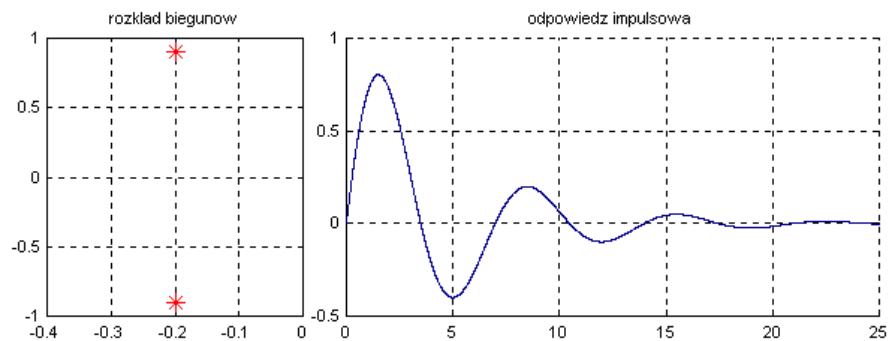
$$k_i(t) = \frac{k}{2j\omega} (e^{\alpha+j\omega t} - e^{\alpha-j\omega t}) \mathbf{1}(t) = ke^{\alpha t} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j\omega} \right) \mathbf{1}(t) = ke^{\alpha t} \sin \omega t$$

$$\alpha = \operatorname{Re} s_k < 0, \lim_{t \rightarrow \infty} k_i(t) = 0$$

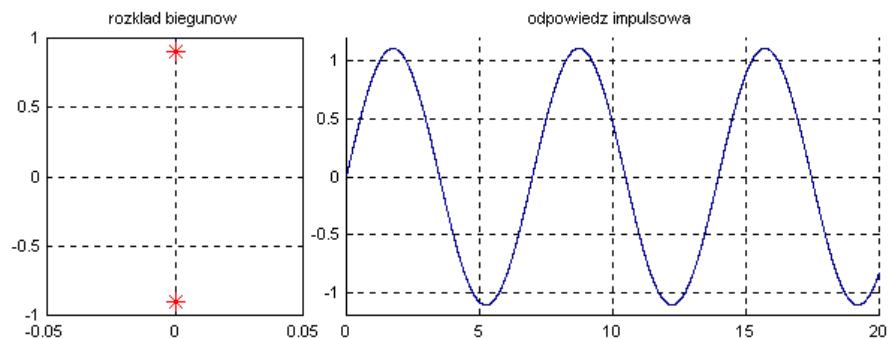
$$\alpha = \operatorname{Re} s_k = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} k_i(t) = k$$

$$\alpha = \operatorname{Re} s_k > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} k_i(t) = \infty$$

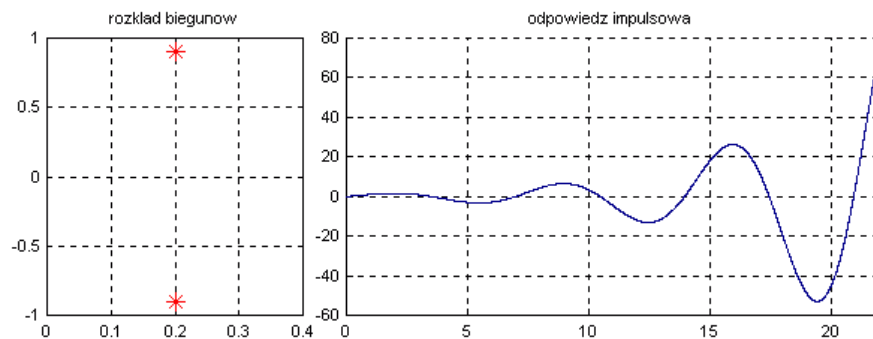
$$\alpha = \text{Res}_k < 0,$$



$$\alpha = \text{Res}_k = 0,$$

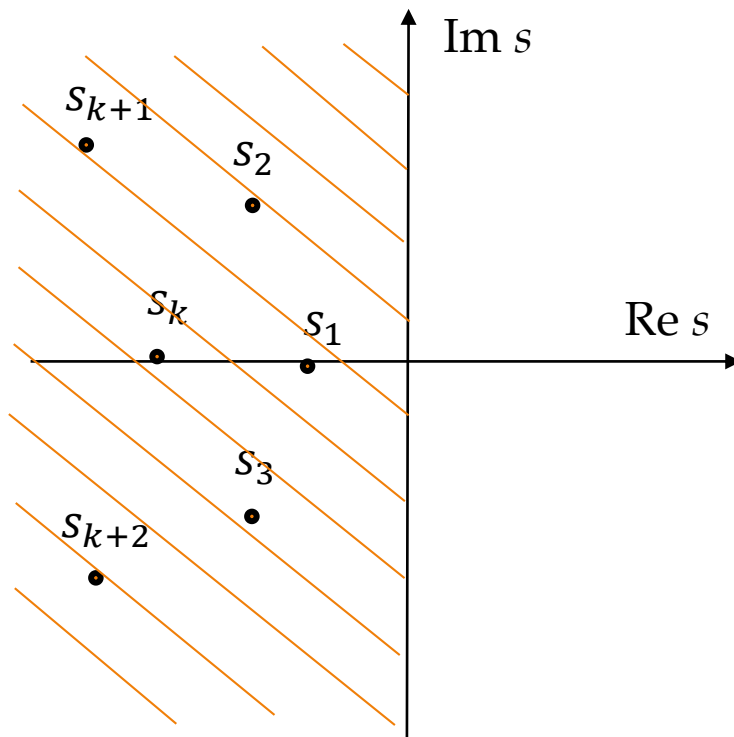


$$\alpha = \text{Res}_k > 0,$$



Stabilność układu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^p |e^{s_k t}| = \begin{cases} 0 & \text{dla } \operatorname{Re} s_k < 0 \text{ i } p < \infty \text{ (p - skończone)} \\ 1 & \text{dla } \operatorname{Re} s_k = 0 \text{ i } p = 0, \\ \infty & \text{dla } \operatorname{Re} s_k \geq 0 \text{ i } p > 0. \end{cases}$$



Kryterium stabilności

Kryterium Hurwitza

$$\Psi(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Ma pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie???

$$a_n > 0$$

$$\Delta_1 = |a_{n-1}| > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0$$

$\vdots$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \end{vmatrix} > 0$$

Kryterium stabilności

Przykład - Szczególny przypadek - $n=3$

$$\Psi(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

$$a_3 > 0$$

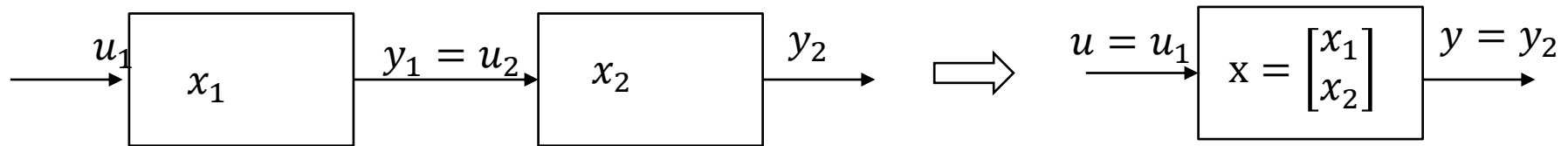
$$\Delta_1 = |a_2| > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} > 0$$

Stabilność układów złożonych

Połączenie szeregowe



$$\frac{dx_1(t)}{dt} = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t), \quad y_1(t) = C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t), \quad y_2(t) = C_2 x_2(t) + D_2 u_2(t)$$

Stabilność układów złożonych

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_2(t)}{dt} &= A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \stackrel{y_1 = u_2}{=} A_2 x_2(t) + B_2 (C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t)) = \\ &= B_2 C_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + B_2 D_1 u_1(t)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{aligned}y(t) &= y_2(t) = C_2 x_2(t) + D_2 u_2(t) \stackrel{y_1 = u_2}{=} C_2 x_2(t) + D_2 (C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t)) = \\ &= [D_2 C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [D_2 \quad D_1] u(t)\end{aligned}$$

Stabilność układów złożonych

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

gdzie :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}, C = [D_2 C_1 \quad C_2], D = [D_1 \quad D_2], x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

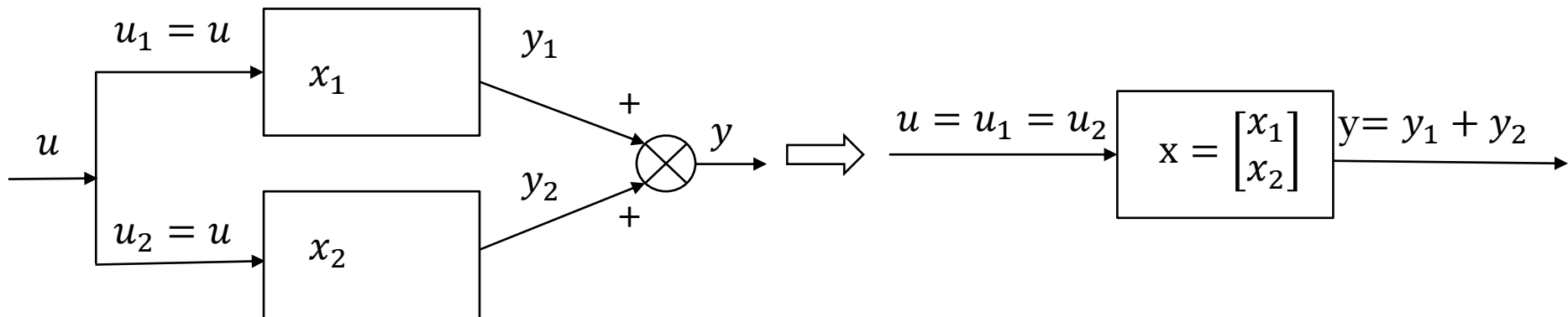
Stabilność:

$$\Psi(s) = \det[Is - A] = \det \left[Is - \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \right] = \det[I_1 s - A_1] \times \det[I_2 s - A_2] = 0$$

Wniosek: Układ złożony z elementów połączonych szeregowo jest stabilny jeżeli każdy element jest stabilny

Stabilność układów złożonych

Połączenie równoległe



$$\frac{dx_1(t)}{dt} = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t), \quad y_1(t) = C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t), \quad y_2(t) = C_2 x_2(t) + D_2 u_2(t)$$

Stabilność układów złożonych

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix} u(t)$$

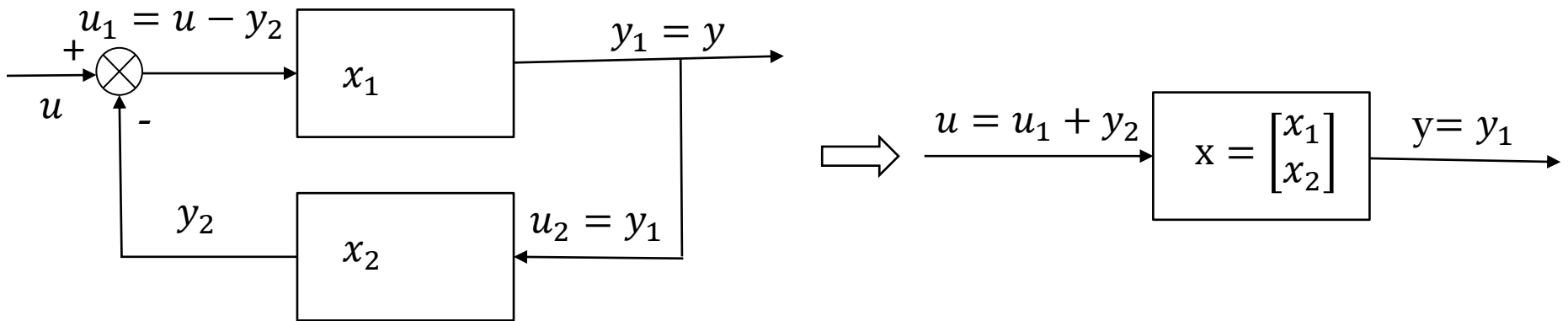
Stabilność:

$$\Psi(s) = \det[Is - A] = \det \left[Is - \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right] = \det[I_1 s - A_1] \times \det[I_2 s - A_2] = 0$$

Wniosek: Układ złożony z elementów połączonych równolegle jest stabilny jeżeli każdy element jest stabilny

Stabilność układów złożonych

Połączenie ze sprzężeniem zwrotnym



$$\frac{dx_1(t)}{dt} = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t), \quad y_1(t) = C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t), \quad y_2(t) = C_2 x_2(t) + D_2 u_2(t)$$

Stabilność układów złożonych

$$u_1(t) = u(t) - y_2(t)$$

$$u_1(t) = u(t) - C_2 x_2(t) - D_2 u_2(t) \stackrel{u_2 \equiv y_1}{=} u(t) - C_2 x_2(t) - D_2 (C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t))$$

$$[I + D_1 D_2] u_1(t) = u(t) - C_2 x_2(t) - D_2 C_1 x_1(t) \quad \text{niech:} \quad w = I + D_1 D_2$$

$$u_1(t) = w^{-1} (u(t) - C_2 x_2(t) - D_2 C_1 x_1(t))$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = A_1 x_1(t) + B_1 w^{-1} (u(t) - C_2 x_2(t) - D_2 C_1 x_1(t))$$

$$y_1(t) = C_1 x_1(t) + D_1 w^{-1} (u(t) - C_2 x_2(t) - D_2 C_1 x_1(t))$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \stackrel{u_2 \equiv y_1}{=}$$

$$= A_2 x_2(t) + B_2 (C_1 x_1(t) + D_1 w^{-1} (u(t) - C_2 x_2(t) - D_2 C_1 x_1(t)))$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = (C_1 - D_1 w^{-1} D_1 w^{-1}) x_1(t) + (A_2 - B_2 D_1 w^{-1} C_2) x_2(t) + B_2 D_1 w^{-1} u(t)$$

Stabilność układów złożonych

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 w^{-1} D_2 C_1 & B_1 w^{-1} C_2 \\ B_2 (C_1 - D_1 w^{-1} D_2 C_1) & A_2 - B_2 D_1 w^{-1} C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 w^{-1} \\ B_2 D_1 w^{-1} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \begin{bmatrix} C_1 - D_1 w^{-1} D_2 C_1 & D_1 w^{-1} C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 w^{-1} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\Psi(s) = \det \left[sI - \begin{bmatrix} A_1 - B_1 w^{-1} D_2 C_1 & B_1 w^{-1} C_2 \\ B_2 (C_1 - D_1 w^{-1} D_2 C_1) & A_2 - B_2 D_1 w^{-1} C_2 \end{bmatrix} \right] = \dots$$

$$= \det[sI - A_1] \det[sI - A_2] \det[sI - K_1(s)K_2(s)] =$$

$$= M_0(s) \det[I + K_1(s)K_2(s)] = 0 \quad \text{gdzie :}$$

$$M_0(s) = \det[sI - A_1] \det[sI - A_2]$$

$$K_1(s) = C_1 [sI - A_1]^{-1} B_1 + D_1$$

$$K_2(s) = C_2 [sI - A_2]^{-1} B_2 + D_2$$

Stabilność układów złożonych

Z warunku

$$\Psi(s) = M_0(s) \det[I + K_1(s)K_2(s)] = 0$$

wynika, że:

$$M_0(s) = \det[sI - A_1] \det[sI - A_2] = 0$$

co oznacza że układ otwarty musi być stabilny, czyli jego elementy muszą być stabilne. ($M_0 = 0$ – równanie charakterystyczne układu otwartego)

Zatem dla układu zamkniętego pozostaje warunek:

$$\det[I + K_1(s)K_2(s)] = 0$$

Rozważmy szczególny przypadek, gdy elementy układy są jednowymiarowe.
Wówczas:

Stabilność układów złożonych

Rozważmy szczególny przypadek, gdy elementy układy są jednowymiarowe.

Wówczas:

$$K_1(s) = \frac{L_1(s)}{M_1(s)} \quad K_2(s) = \frac{L_2(s)}{M_2(s)}$$

Gdzie:

$$M_1(s) = \det[sI - A_1] \quad M_2(s) = \det[sI - A_2]$$

Zatem:

$$\Psi(s) = M_0(s) \det[1 + K_1(s)K_2(s)] = 0$$

$$\Psi(s) = M_0(s) \det \left[1 + \frac{L_1(s)}{M_1(s)} \frac{L_2(s)}{M_2(s)} \right] = M_0(s) \left[1 + \frac{L_0(s)}{M_0(s)} \right] = 0$$

$$\Psi(s) = M_0(s) + L_0(s) = 0$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego, gdzie:

$$L_0(s) = L_1(s)L_2(s) \quad M_0(s) = M_1(s)M_2(s)$$

Stabilność układów złożonych

Na podstawie powyższych rozważań możemy stwierdzić, że układ ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeżeli elementy układu są stabilne oraz równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma wszystkie pierwiastki o ujemnych częściach rzeczywistych (o niedodatnich częściach rzeczywistych i każdy pierwiastek o zerowej części rzeczywistej jest pierwiastkiem jednokrotnym wielomianu charakterystycznego).

Kryterium stabilności

Kryterium Hurwitza

$$\Psi(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Ma pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie???

$$a_n > 0$$

$$\Delta_1 = |a_{n-1}| > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0$$

$\vdots$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \end{vmatrix} > 0$$

Kryterium stabilności

Przykład - Szczególny przypadek - $n=3$

$$\Psi(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

$$a_3 > 0$$

$$\Delta_1 = |a_2| > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} > 0$$

Kryterium stabilności

Rozważmy jednowymiarowy układ ze sprzężeniem zwrotnym, w którym:

$$K_1(s) = \frac{k}{s(1+sT_1)(1+sT_2)} \quad K_2(s) = 1$$

Transmitancja układu otwartego:

$$K(s) = K_1(s)K_2(s) = \frac{k}{s(1+sT_1)(1+sT_2)} \times 1 = \frac{k}{s(1+sT_1)(1+sT_2)} = \frac{L_0(s)}{M_0(s)}$$

Równanie charakterystyczne układu otwartego:

$$M_0(s) = s(1+sT_1)(1+sT_2)$$

Warunek stabilności układu otwartego:

$$-\frac{1}{T_1} < 0, \quad -\frac{1}{T_2} < 0 \quad \text{czyli} \quad T_1 > 0, \quad T_2 > 0$$

Kryterium stabilności

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego:

$$\Psi(s) = M_0(s) + L_0(s) = s(1 + sT_1)(1 + sT_2) + k = s^3T_1T_2 + s^2(T_1 + T_2) + s + k = 0$$

$$a_3 = T_1T_2 > 0$$

$$\Delta_1 = |a_2| = T_1 + T_2 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_1 + T_2 & T_1T_2 \\ k & 1 \end{vmatrix} = (T_1 + T_2) \times 1 - k \times T_1T_2 > 0,$$

Stąd:

$$T_1 + T_2 > k \times T_1T_2, \quad \text{zatem:} \quad \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} > k$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_1 + T_2 & T_1 T_2 & 0 \\ k & 1 & T_1 + T_2 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = \Delta_2 k > 0$$

Ponieważ: $\Delta_2 > 0$ pozostaje $k > 0$

Ostatecznie warunek stabilności układu zamkniętego

$$T_1 > 0, T_2 > 0, 0 < k < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$$

Rozważmy dwuwymiarowy układ ze sprzężeniem zwrotnym, w którym:

$$K_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+sT_1)} & \frac{1}{(1+sT_2)} \\ \frac{1}{(1+sT_1)} & \frac{1}{(1+sT_2)} \end{bmatrix}, T_1 > 0, T_2 > 0 \quad K_2(s) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne układu otwartego:

$$M_0(s) = (1+sT_1)(1+sT_2)$$

Pierwiastki równania charakterystycznego układu otwartego wynoszą:

$$-\frac{1}{T_1}, -\frac{1}{T_2} \text{ ponieważ } T_1 > 0, \quad T_2 > 0 \text{ zatem } -\frac{1}{T_1} < 0, -\frac{1}{T_2} < 0$$

Pierwiastki równania charakterystycznego układu otwartego leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego:

$$\Psi(s) = M_0(s) \det[I + K_1(s)K_2(s)] = 0$$

$$\begin{aligned}\Psi(s) &= (1 + sT_1)(1 + sT_2) \det \begin{bmatrix} 1 + \frac{k_1}{(1 + sT_1)} & \frac{k_2}{(1 + sT_2)} \\ \frac{k_1}{(1 + sT_1)} & 1 + \frac{k_2}{(1 + sT_2)} \end{bmatrix} = \\ &= (1 + sT_1)(1 + sT_2) \left(1 + \frac{k_1}{(1 + sT_1)} \right) \left(1 + \frac{k_2}{(1 + sT_2)} \right) - \frac{k_1}{(1 + sT_1)} \frac{k_2}{(1 + sT_2)} = \\ &= s^2 T_1 T_2 + s(T_1(1 + k_1) + T_2(1 + k_2)) + 1 + k_1 + k_2\end{aligned}$$

Kryterium stabilności

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego:

$$\Psi(s) = M_0(s) + L_0(s) = s^2 T_1 T_2 + s(T_1(1+k_1) + T_2(1+k_2)) + 1 + k_1 + k_2$$

$$a_2 = T_1 T_2 > 0$$

$$\Delta_1 = |a_1| = T_1(1+k_1) + T_2(1+k_2) > 0$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_1(1+k_1) + T_2(1+k_2) & T_1 T_2 \\ 0 & 1 + k_1 + k_2 \end{vmatrix} = \\ &= \Delta_1(1+k_1+k_2) > 0, \text{ ponieważ } \Delta_1 \text{ pozostaje } 1+k_1+k_2 > 0 \end{aligned}$$

Stąd ostatecznie warunki stabilności:

$$T_1 > 0, T_2 > 0, T_1(1+k_1) + T_2(1+k_2) > 0, 1+k_1+k_2 > 0$$

Stabilność układu – obiekty dyskretne

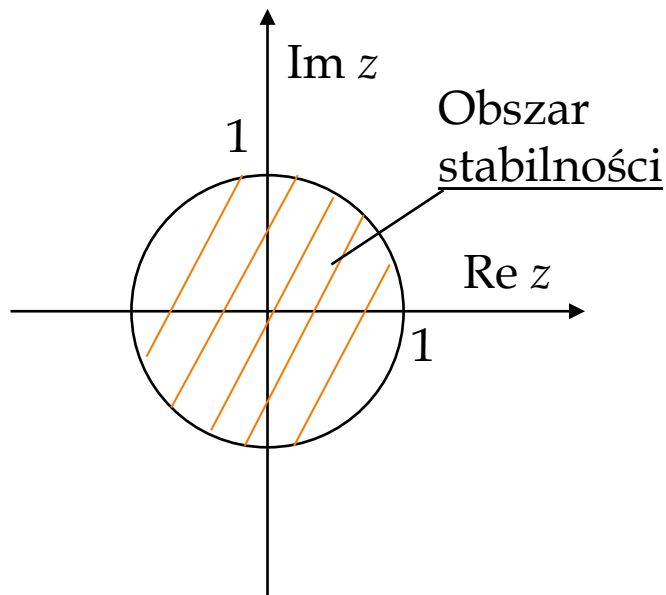
Analogicznie jak dla obiektów ciągłych układ dyskretny jest stabilny jeżeli wytrącony ze stanu równowagi zostanie sprowadzony do stanu równowagi

Układ dyskretny nazywamy stabilnym, jeżeli dyskretne wartości składowych przejściowych zmiennych stanu są ograniczone dla dowolnej chwili. Jeżeli ponadto te dyskretne wartości składowych przejściowych dążą do zera przy liczbie taktów dążących do nieskończoności, to układ nazywamy asymptotycznie stabilnym

Stabilność układu

Warunek konieczny i dostateczny stabilności układów ciągłych liniowych.

Układ liniowy stacjonarny opisany równaniem $x_{n+1} = Ax_n$ jest stabilny wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie wartości własne macierzy A leżą we wnętrzu okręgu o promieniu jeden na płaszczyźnie zespolonej z .



Stabilność układu

Opis układu: $x_{n+1} = Ax_n, x_0$

Rozwiązanie: $x_n = \sum_{k=1}^r \left[\alpha_{k1} z_k^n + \alpha_{k2} n z_k^{n-1} + \dots + \alpha_{km_k} n(n-1) \dots (n-m_k+2) z_k^{n-m_k+1} \right] x_0,$

dla pierwiastków wielokrotnych równania

$$\text{Stabilność układu}$$

$$\Psi(z) = \det[zI - A] = (z - \lambda_1)^{m_1} (z - \lambda_2)^{m_2} \dots (z - \lambda_r)^{m_r}, \sum_{k=1}^r m_k = m \leq K$$

$z_1, z_2, \dots, z_r$ – pierwiastki równania $\Psi(z) = 0$

r – liczba różnych pierwiastków,

m_k – krotność k -tego pierwiastka, $k = 1, 2, \dots, r$

Gdzie:

$$\alpha_{kj} = \sum_{i=j-1}^{m_k-1} \frac{\Psi_k(z)}{(i-j+1)!(j-1)!} z \frac{d^{i-j+1}}{d\lambda^{i-j+1}} \left[\frac{1}{\Psi(z)} \right]_{\lambda=\lambda_k} [A - z_k I]^i, \Psi_k(z) = \frac{\Psi(z)}{(z - \lambda_k)^{m_k}}$$

Stabilność układu

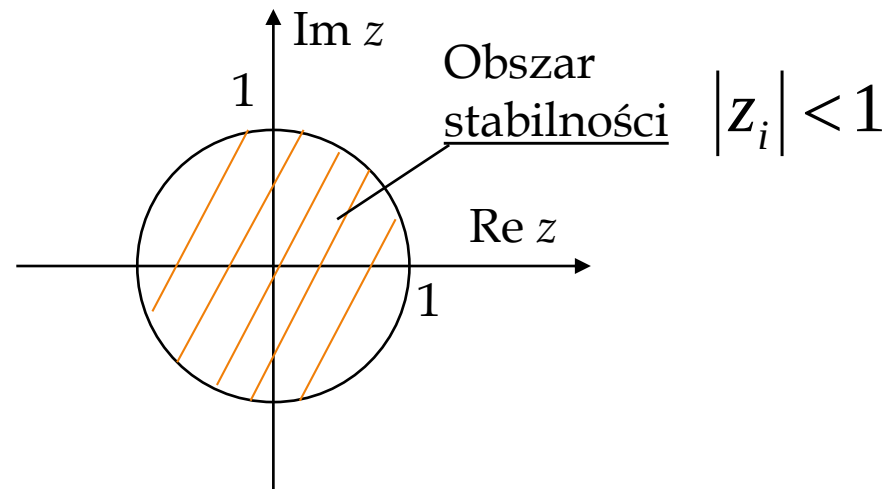
Łatwo zauważyć że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1) \cdots (n-j+1) z_i^{n-j} = \begin{cases} 0 & \text{dla } |z_i| < 1 \\ \infty & \text{dla } |z_i| > 1 \end{cases} \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^r \left[\alpha_{k1} z_k^n + \alpha_{k2} n z_k^{n-1} + \cdots + \alpha_{km_k} n(n-1) \cdots (n-m_k+2) z_k^{n-m_k+1} \right] x_0$$

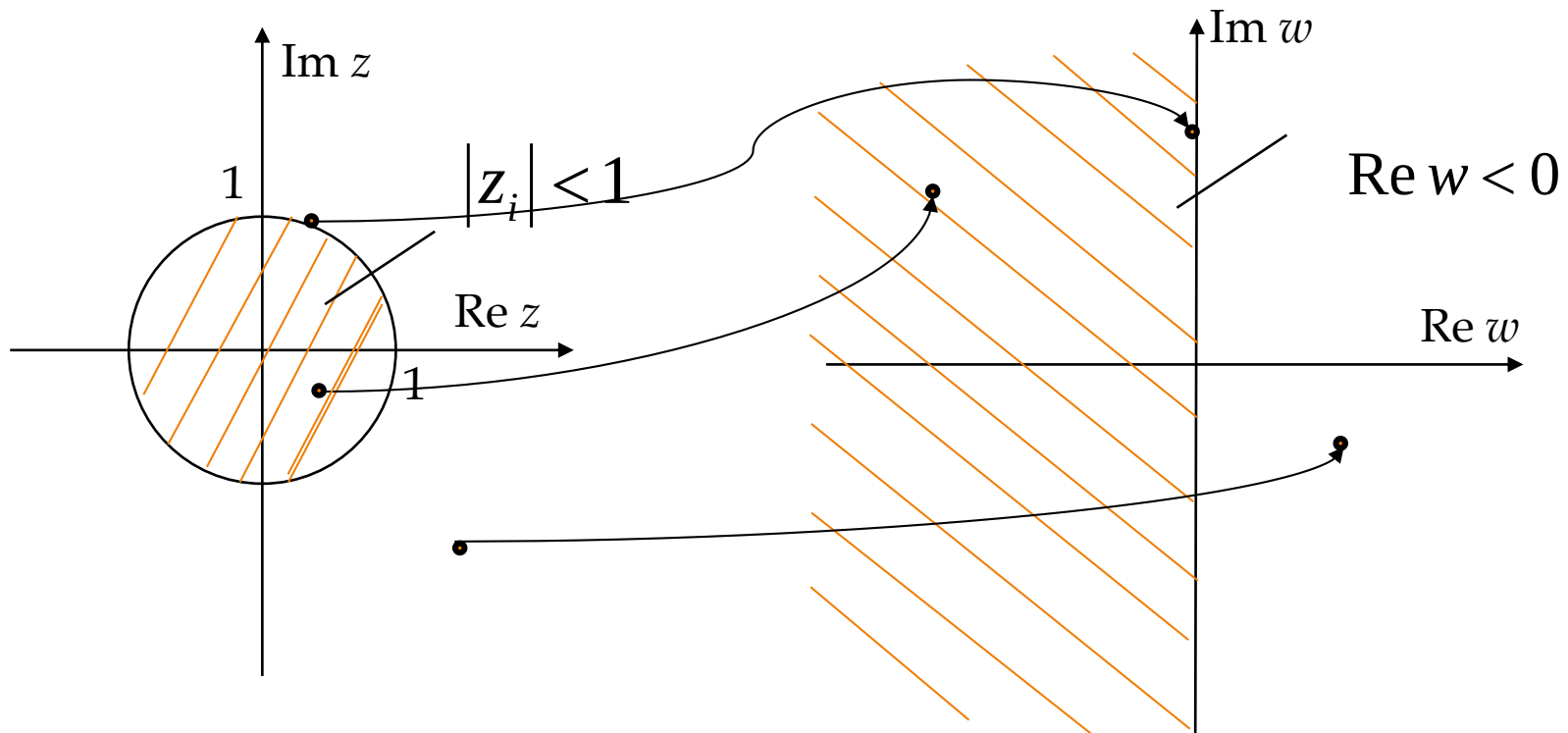
$$= \begin{cases} 0 & \text{dla } |z_i| < 1 \\ \infty & \text{dla } |z_i| > 1 \end{cases}$$



Jak to zbadać

Dokonajmy przekształcenia: $z = \frac{1+w}{1-w}$

Takie przekształcenie dokonuje transformacji wnętrza koła o promieniu jeden w przestrzeni z w lewą półpłaszczyznę w przestrzeni w



Zastosowanie kryterium Hurwitza

$$\Psi^*(w) = \Psi(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \Psi\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$$

Po takim przekształceniu możemy zastosować kryterium Hurwitza do badania wielomianu $\Psi^*(w)$

Przykład:

$$\Psi(z) = z^2 + a_1 z + a_0$$

$$\Psi^*(w) = \Psi(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + a_1 \left(\frac{1+w}{1-w}\right) + a_0$$

$$\begin{aligned} \Psi^*(w)(1-w) &= (1+w)^2 + a_1(1+w)(1-w) + a_0(1-w)^2 = \\ &= (1 + a_1 + a_0) w^2 + 2(1 - a_0)w + 1 - a_1 + a_0 = 0 \end{aligned}$$

Przykład c.d.

$$\Psi^*(w)(1-w) = (1+a_1+a_0)w^2 + 2(1-a_0)w + 1-a_1+a_0 = 0$$

Teraz możemy zastosować kryterium Hurwitza, czyli:

$$1+a_1+a_0 > 0$$

$$\Delta_1 = |2(1-a_0)| = 1-a_0 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(1-a_0) & 1+a_1+a_0 \\ 0 & 1-a_1+a_0 \end{vmatrix} = 2(1-a_0)(1-a_1+a_0) > 0$$

czyli

$$1-a_1+a_0 > 0$$

Dziękuję za uwagę

