

Modele systemów dynamicznych



Wykład 9. Podumowanie

Prof. zw. dr hab. inż. Jerzy Świątek
pokój 120, budynek C-3

Poniedziałek godz. 12⁰⁰-13⁰⁰
Wtorek parzysty godz. 7⁰⁰-9⁰⁰
Środa godz. 9⁰⁰-11⁰⁰- zdalnie

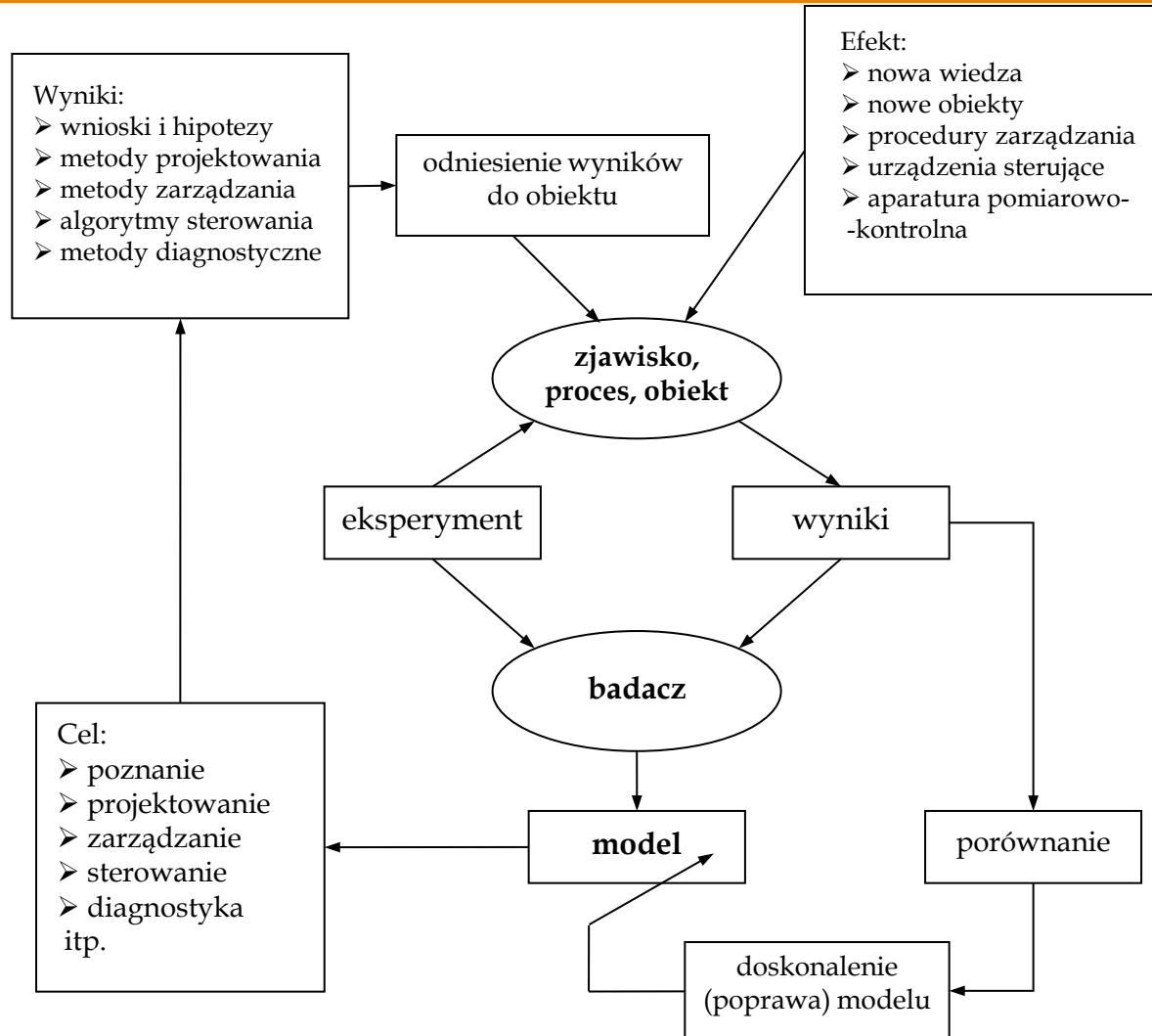


Godziny konsultacji

Analiza systemowa

- ∞ Analiza systemowa – zbiór metod i technik wspomagających analizę, projektowanie, zarządzanie i sterowanie w złożonych sytuacjach
 - Systematyczny sposób analizy złożonych problemów w celu **osiągnięcia określonego celu**
 - Opracowanie propozycji różnych rozwiązań z uwzględnieniem **złożonego celu** oraz wielu kryteriów oceny rozwiązania
 - Wspomaganie decydenta w wyborze optymalnego rozwiązania spośród wielu możliwości

Model w badaniach systemowych



Sygnały Ciągłe

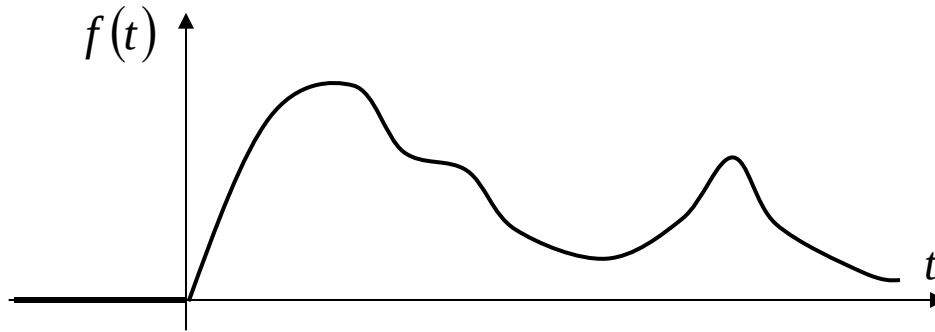


Transformta Laplace'a

Transformata Laplace'a

Rozważmy funkcję $f(t)$, dla której $f(t) = 0$ dla $t < 0$

Dla każdego t , $|f(t)| < \infty$ zachodzi $\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt < \infty$



Definicja transformaty Laplace'a:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

gdzie: s - Zmienna zespolona: $s = \sigma + j\omega$

Transformata Laplace'a

Odwrotna transformata Laplace'a:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$$

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \rightarrow & F(s) \\ & \text{przekształcenia} & \downarrow \\ f'(t) & \leftarrow & F'(s) \end{array}$$

Transformata Laplace'a

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\mathbf{1}(t)t$	$\frac{1}{s^2}$
$\mathbf{1}(t)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{s^k}$
$\mathbf{1}(t)e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$\mathbf{1}(t)\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\mathbf{1}(t)\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

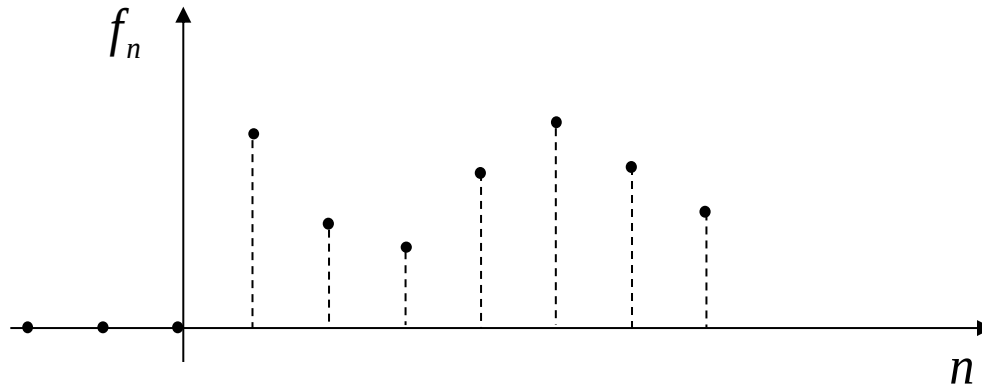
Sygnały Dyskretne



Transformata $\mathcal{Z}$

Transformata $\mathcal{Z}$

Rozważmy ciąg liczbowy f_n dla którego $f_n = 0$ dla $n < 0$



Dla każdego n , $|f_n| < \infty$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n z^{-n}| = 0$

z - zmienna zespolona : $z = \sigma + j\omega$

Transformata $\mathcal{Z}$

Definicja transformaty $\mathcal{Z}$:

$$F(z) = \mathcal{Z}[f_n] \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

Odwrotna transformata $\mathcal{Z}$:

$$f_n = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(z) z^{n-1} dz$$

Transformata $\mathcal{Z}$

$$\begin{array}{ccc} f_n & \rightarrow & F(z) \\ & \text{przekształcenia} & \downarrow \\ f'_n & \leftarrow & F'(z) \end{array}$$

Transformata $\mathcal{Z}$

f_n	$F(z)$
δ_n	1
$\mathbf{1}_n$	$\frac{z}{z-1}$
$\mathbf{1}_n \cdot n$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\mathbf{1}_n \cdot n^2$	$\frac{z^2 + z}{(z-1)^2}$
$\mathbf{1}_n \cdot a^n$	$\frac{z}{z-a}$
$\mathbf{1}_n \cdot \sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$\mathbf{1}_n \cdot \cos \omega n$	$\frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$

Typowe opisy zmienne stanu – równania stanu

Przypadek ciągły:

Wektor stanu: $x(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(K)}(t) \end{bmatrix}$

Równania stanu:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), u(t)), \quad x(t_0)$$
$$y(t) = G(x(t), u(t))$$

Warunki początkowe:

Przypadek liniowy:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Typowe opisy równania różniczkowe

Równanie różniczkowe:

$$F\left(\frac{d^m y(t)}{dt^m}, \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t); \frac{d^v u(t)}{dt^v}, \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}}, \dots, \frac{du(t)}{dt}, u(t)\right) = 0 \quad \text{Warunki początkowe}$$

Liniowe równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} \frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= \\ = b_v \frac{d^v u(t)}{dt^v} + b_{v-1} \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} m \geq v \\ \text{Warunki początkowe} \end{array}$$

Typowe opisy

transmitancja

Transmitancja: $K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ $K(s) = \frac{b_v s^v + b_{v-1} s^{v-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m \geq v$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \right] = \mathcal{L} \left[b_v \frac{d^v u(t)}{dt^v} + b_{v-1} \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + a_0 u(t) \right]$$

Zerowe warunki początkowe

$$Y(s) (s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0) = U(s) (b_v s^v + b_{v-1} s^{v-1} + \dots + b_1 s + b_0)$$

Typowe opisy odpowiedź impulsowa

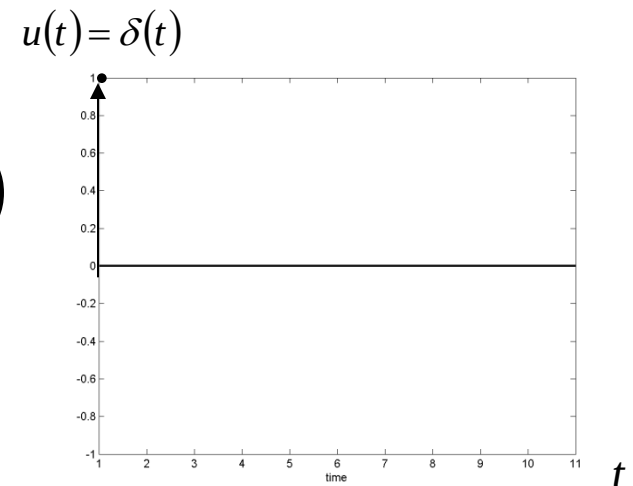
Odpowiedź impulsowa

Transmitancja: $K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

gdzie: $Y(s) = K(s)U(s)$

$$U(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

oraz: $\delta(t)$ delta Dirac'a.



Odpowiedź impulsowa: $k_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)]$

Delta Dirac'a

Typowe opisy odpowieź na skok jednostkowy

Odpowiedź na skok jednostkowy

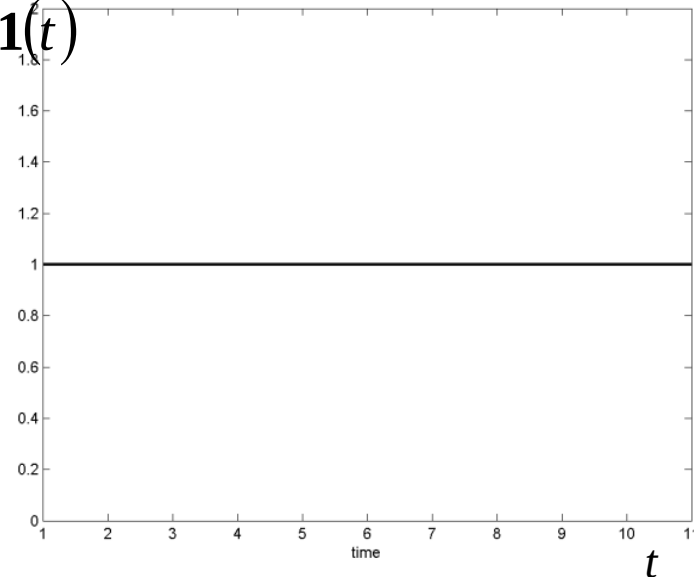
Transmitancja: $K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ $u(t) = \mathbf{1}(t)$

$$Y(s) = K(s)U(s)$$

gdzie:

$$U(s) = \mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}$$

oraz: $\mathbf{1}(t)$ jest skokiem jednostkowym.

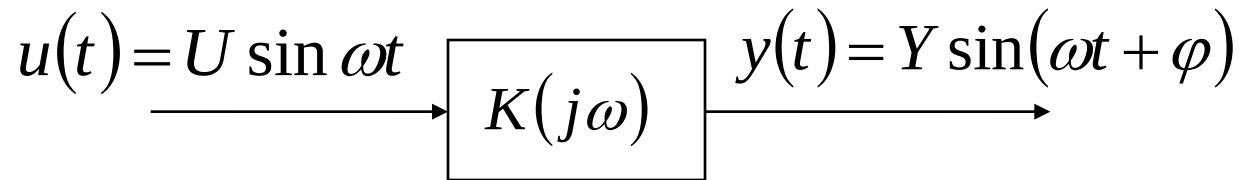


Skok jednostkowy

Odpowiedź na skok
jednostkowy:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K(s)}{s}\right]$$

Transmitancja widmowa – charakterystyki częstotliwościowe



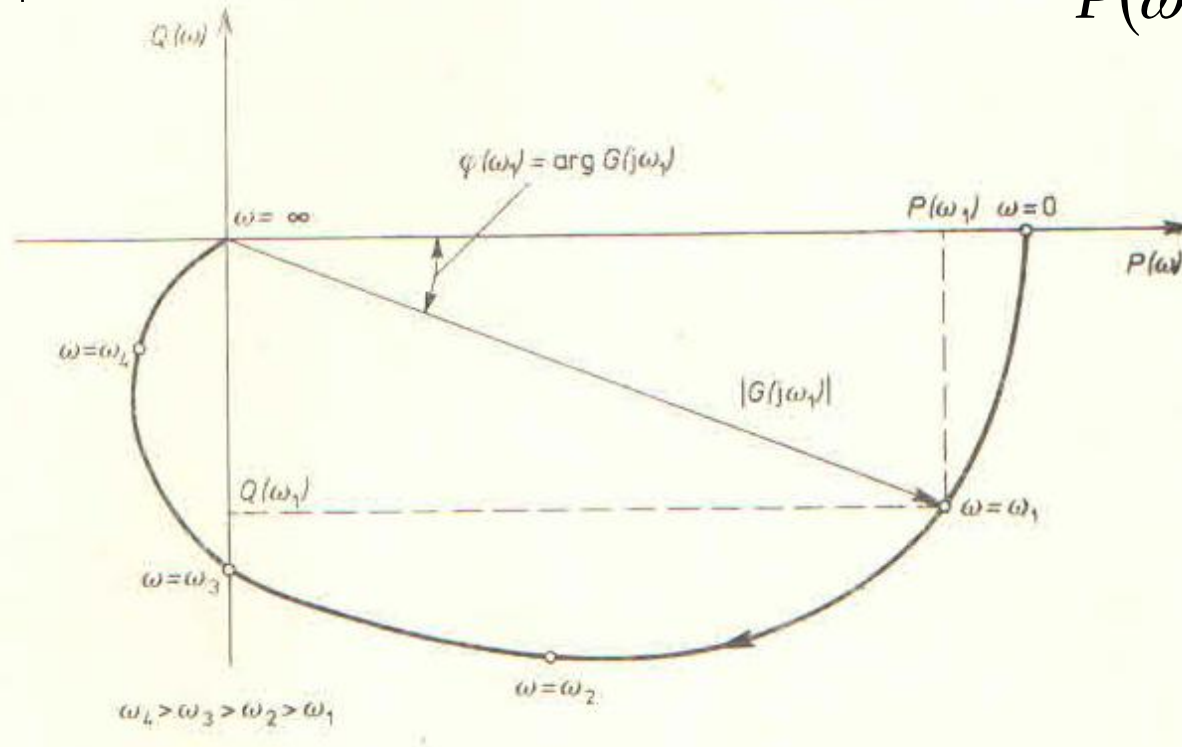
$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = K(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$K(j\omega) = \operatorname{Re}[K(j\omega)] + j \operatorname{Im}[K(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$|K(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

$$K(j\omega) = \operatorname{Re}[K(j\omega)] + j \operatorname{Im}[K(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$|K(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$



Typowe opisy

zmienne stanu – równania stanu

Przypadek dyskretny:

Wektor stanu: $x_n = \begin{bmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(K)} \end{bmatrix}$

Przykład:



$$x_{n+1} = (x_n + u_n) \bmod 2$$

$$y_n = x_n$$

$$x_n \in \{0,1\}, \quad u_n \in \{0,1\}$$

<http://www.freeclipartisland.com/>

Równania stanu:

$$x_{n+1} = F(x_n, u_n)$$

$$y_n = G(x_n, u_n)$$



$$x_{n+1} = x_n + \alpha \cdot x_n + u_n$$

$$y_n = x_n$$

gdzie:

α - stopa procentowa

Rachunek bankowy

<http://www.freeclipartisland.com/>

Typowe opisy równania różnicowe

Równanie różnicowe:

$$F(y_{n+m}, y_{n+m-1}, \dots, y_n; u_{n+v}, u_{n+v-1}, \dots, u_n) = 0$$

Liniowe równane różnicowe:

$$y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + \dots + a_0y_n = b_v u_{n+v} + b_{v-1}u_{n+v-1} + \dots + b_0u_n$$

Przykład:



$$y_{n+1} = (y_n + u_n) \bmod 2$$

$$y_n \in \{0,1\}, \quad u_n \in \{0,1\}$$



$$y_{n+1} = (1 + \alpha)y_n + u_n$$

Rachunek bankowy

Typowe opisy

Transmitancja

Transmitancja:

$$K(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$K(z) = \frac{b_v z^v + b_{v-1} z^{v-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad m > v$$

$$\mathcal{Z}[y_{n+m} + a_{m-1} y_{n+m-1} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n] = \mathcal{Z}[b_v u_{n+v} + b_{v-1} u_{n+v-1} + \dots + b_1 u_{n+1} + a_0 u_n]$$

$$Y(z)(z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0) = U(z)(b_v z^v + b_{v-1} z^{v-1} + \dots + b_1 z + b_0)$$

Przykład:

$$K(z) = \frac{1}{(z - (1 + \alpha))}$$



Rachunek bankowy

<http://www.freeclipartisland.com/>

Typowe opisy

dyskretna odpowiedź impulsowa

Dyskretna odpowiedź impulsowa
Transmitancja: $K(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$

$$Y(z) = K(z)U(z)$$

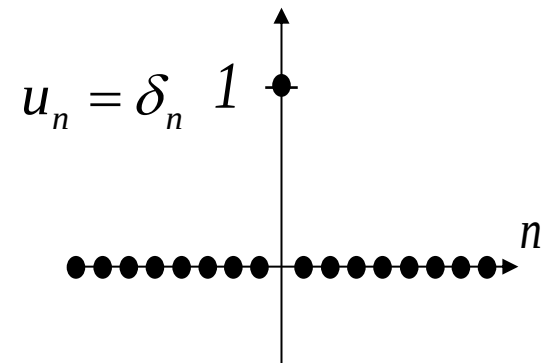
gdzie:

$$U(z) = \mathcal{Z}[\delta_n] = 1$$

oraz: δ_n delta Kroneker'a.

Dyskretna odpowiedź impulsowa:

$$k_{in} = \mathcal{Z}^{-1}[K(z)]$$



Delta Kroneker'a

Typowe opisy

dyskretna odpowiedź na skok jednostkowy

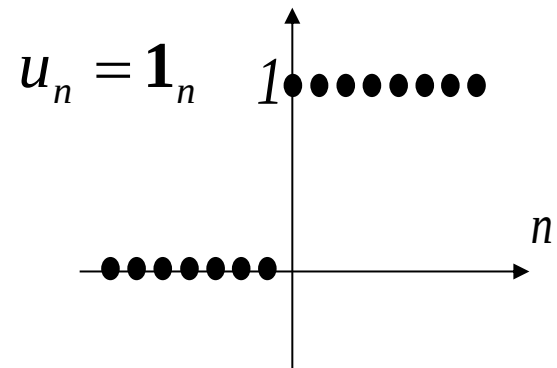
Odpowiedź na skok jednostkowy

Transmitancja: $K(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$

$$Y(z) = K(z)U(z)$$

gdzie:

$$U(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{1}_n] = \frac{z}{z-1}$$



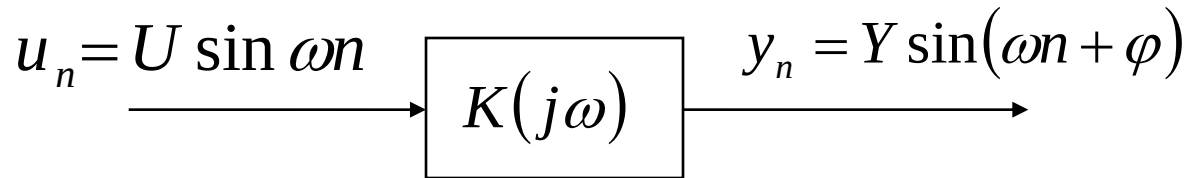
oraz: $\mathbf{1}_n$ dyskretny skok jednostkowy.

Dyskretny skok
jednostkowy

Odpowiedź na skok jednostkowy:

$$h_n = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1} K(z)\right]$$

Transmitancja widmowa – charakterystyki częstotliwościowe



$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = K(z) \Big|_{z=j\omega}$$

$$K(j\omega) = \operatorname{Re}[K(j\omega)] + j \operatorname{Im}[K(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$|K(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element proporcjonalny (idealny)

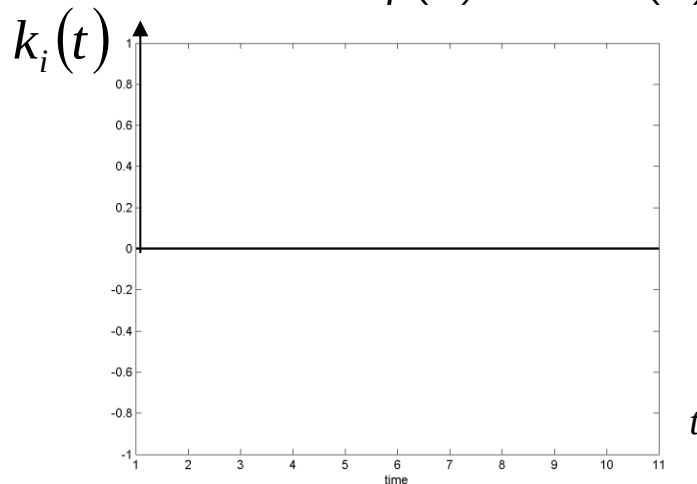
$$y(t) = ku(t)$$

Transmitancja:

$$K(s) = k$$

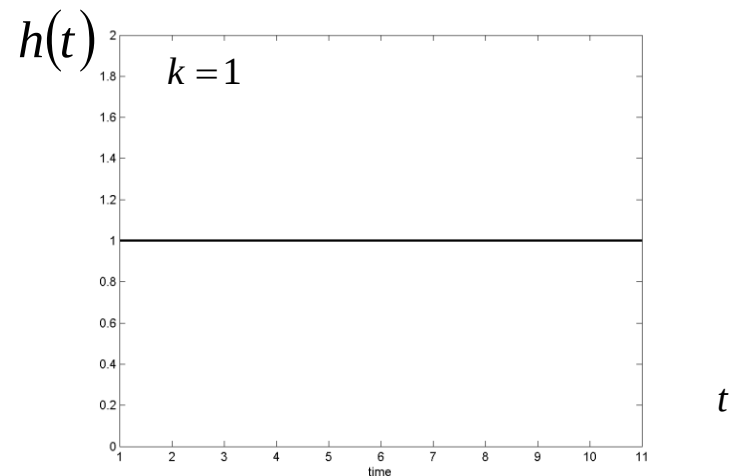
Odpowiedź impulsowa:

$$\cdot \quad k_i(t) = k\delta(t)$$



Odpowiedź skokowa:

$$h(t) = k\mathbf{1}(t)$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element całkujący (idealny)

$$\frac{dy(t)}{dt} = ku(t), \quad y(t) = k \int_0^t u(\tau) d\tau$$

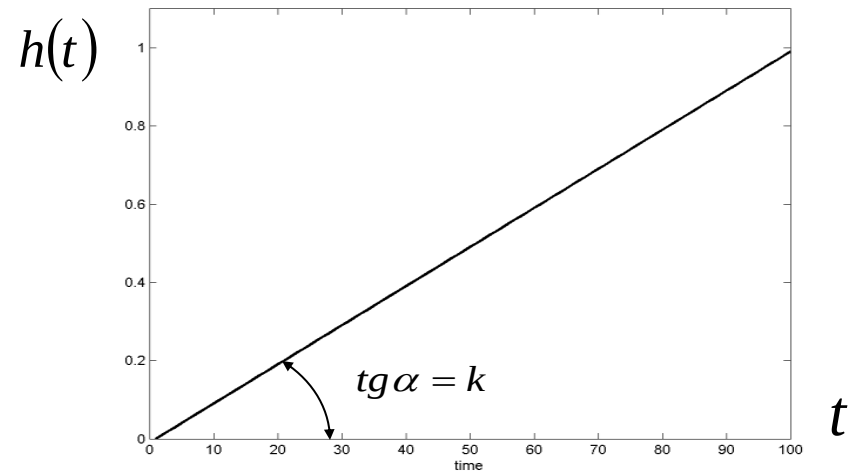
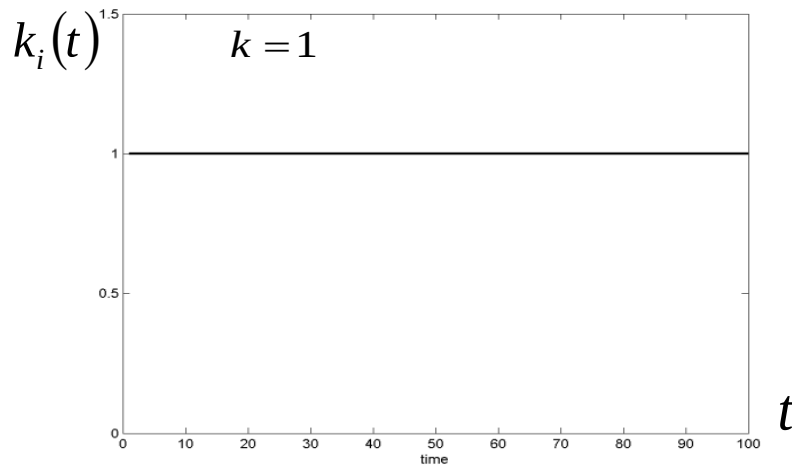
Transmitancja: $K(s) = \frac{k}{s}$

Odpowiedź impulsowa:

$$k_i(t) = k\mathbf{1}(t)$$

Odpowiedź skokowa:

$$h(t) = kt\mathbf{1}(t)$$



W rzeczywistości nie istnieje

Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

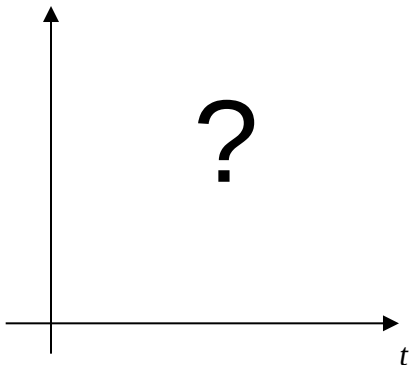
∞ Element różniczkujący (idealny)

$$y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

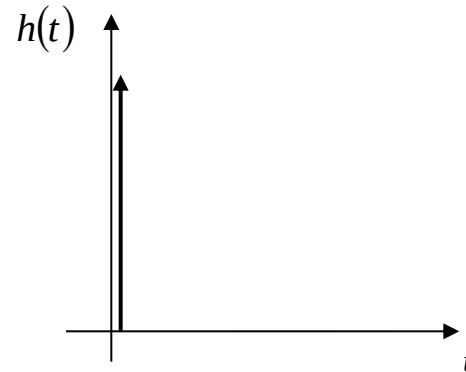
Transmitancja: $K(s) = ks$

W rzeczywistości nie istnieje

Odpowiedź impulsowa: ?



Odpowiedź skokowa: $h(t) = k\delta(t)$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

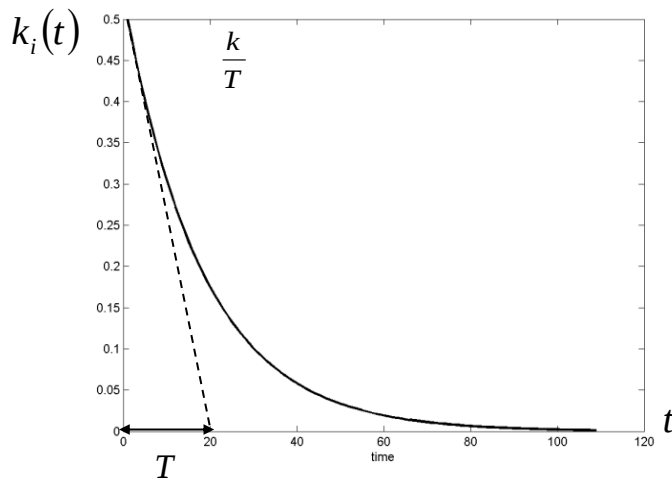
∞ Element inercyjny pierwszego rzędu

(proporcjonalny z inercją)

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$$

Odpowiedź impulsowa:

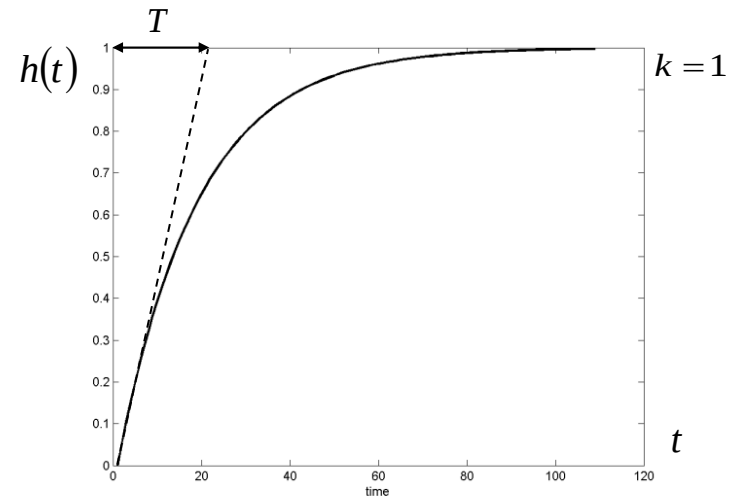
$$k_i(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} \mathbf{1}(t)$$



$$K(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad T > 0$$

Odpowiedź skokowa

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T}) \mathbf{1}(t)$$



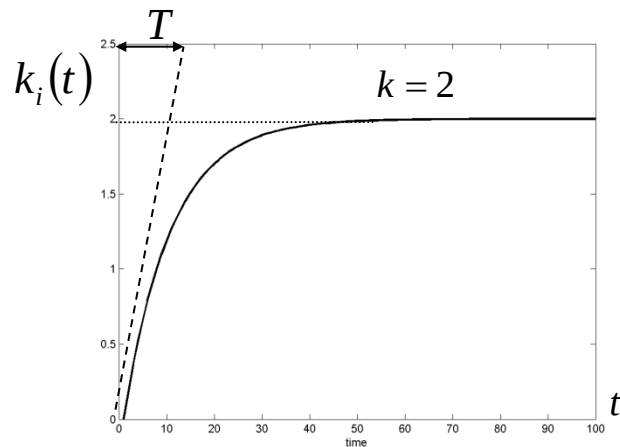
Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element całkujący z inercją

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \int_0^t u(\tau) d\tau \quad T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = ku(t) \quad K(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}, \quad T > 0$$

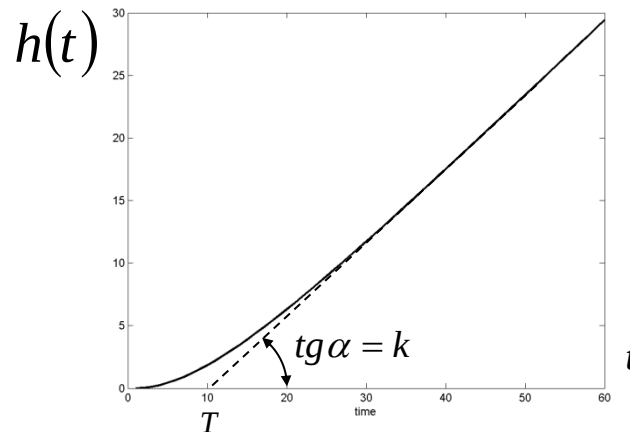
Odpowiedź Impulsowa:

$$k_i(t) = k(1 - e^{-t/T}) \mathbf{1}(t)$$



Odpowiedź skokowa:

$$h(t) = k(t - T(1 - e^{-t/T})) \mathbf{1}(t)$$



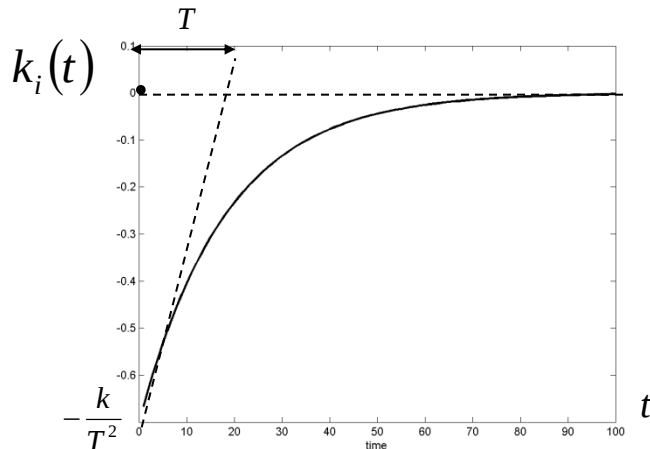
Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element różniczkujący z inercją

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

Odpowiedź impulsowa:

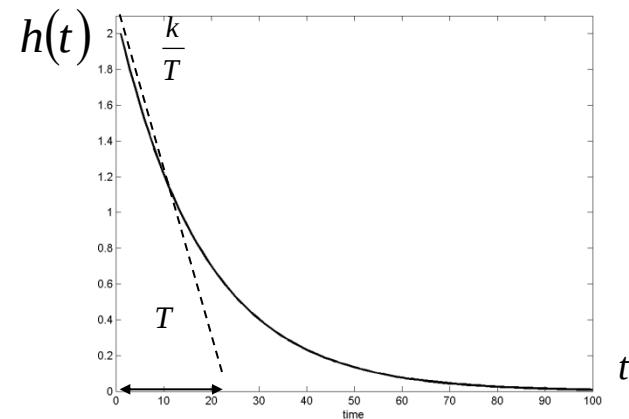
$$k_i(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-t/T} \mathbf{1}(t)$$



$$K(s) = \frac{ks}{Ts + 1}, \quad T > 0$$

Odpowiedź skokowa:

$$h(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} \mathbf{1}(t)$$



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element inercyjny drugiego rzędu

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t) \quad K(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad T_1, T_2 > 0$$

Odpowiedź impulsowa:

$$k_i(t) = k \left(\frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}) \right) \mathbf{1}(t), \quad T_1 \neq T_2$$

$$k_i(t) = k \left(\frac{1}{T} t e^{-t/T} \right) \mathbf{1}(t), \quad T_1 = T_2 = T$$

Odpowiedź skokowa:

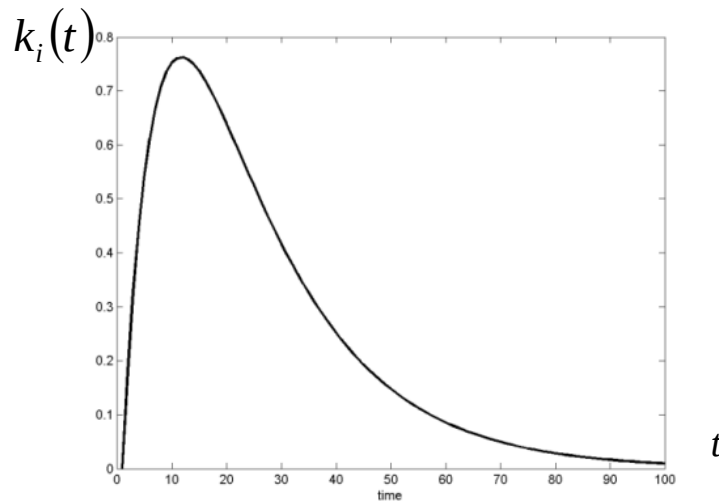
$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) \mathbf{1}(t), \quad T_1 \neq T_2$$

$$h(t) = k \left(1 - \left(\frac{1}{T} t + 1 \right) e^{-t/T} \right) \mathbf{1}(t), \quad T_1 = T_2 = T$$

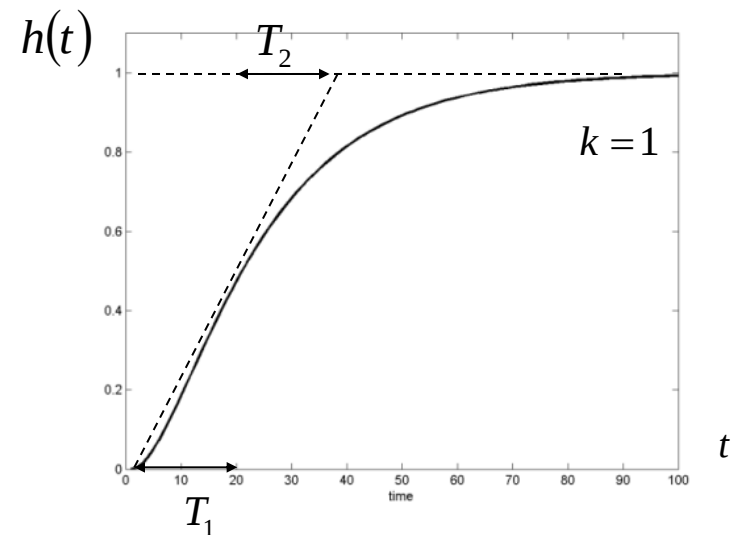
Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element inercyjny drugiego rzędu

Odpowiedź impulsowa:



Odpowiedź skokowa



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne - element oscylacyjny

$$T_n^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T_n \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t), \quad \omega_n = \frac{1}{T_n}, \quad 0 < \xi < 1$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi \omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = k\omega_n^2 u(t) \quad K(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Odpowiedź impulsowa:

$$k_i(t) = \frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\omega_n \xi t} \sin\left(\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)t\right) \mathbf{1}(t); \quad h(t) = k \left[1 - e^{-\omega_n \xi t} \cos \omega_0 t + \frac{\xi e^{-\omega_n \xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_0 t \right] \mathbf{1}(t);$$

$$k_i(t) = \frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\omega_n \xi t} \sin(\omega_0 t) \mathbf{1}(t);$$

$$\omega_0 = \left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)$$

$$h(t) = k \left[1 - \frac{e^{-\omega_n \xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi) \right] \mathbf{1}(t);$$

$$\omega_0 = \left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

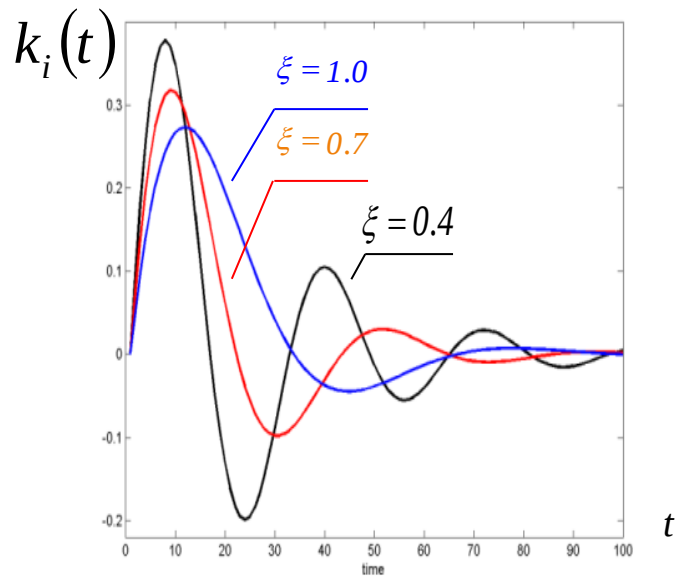
gdzie:

ξ - współczynnik tłumienia, ω_n - naturalna częstotliwość

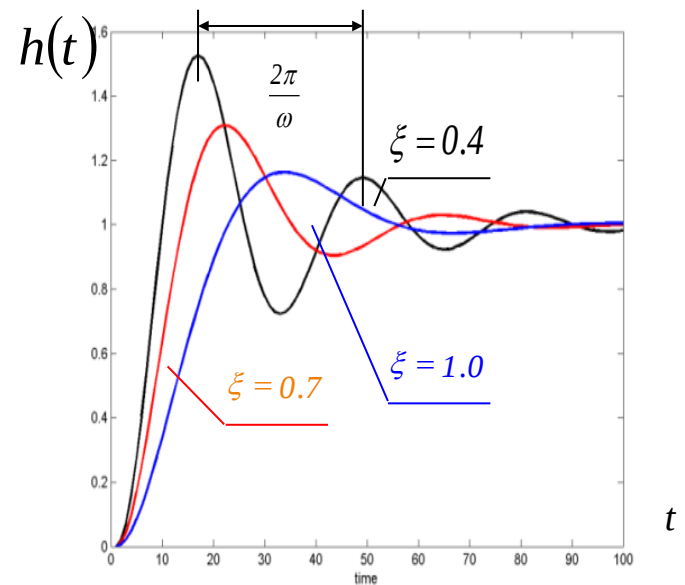
Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element oscylacyjny

Odpowiedź impulsowa:



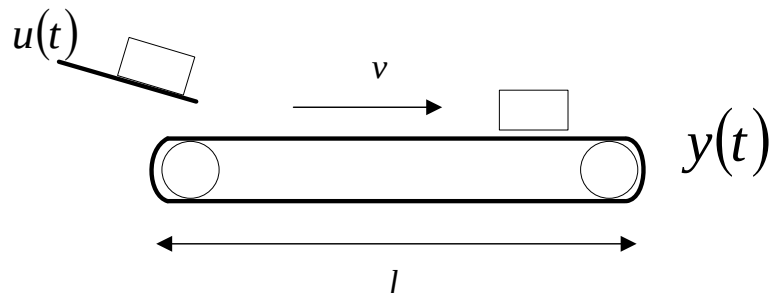
Odpowiedź skokowa:



Podstawowe liniowe elementy dynamiczne

∞ Element opóźniający

○ Przykład



$$y(t) = u(t - \tau_0)$$

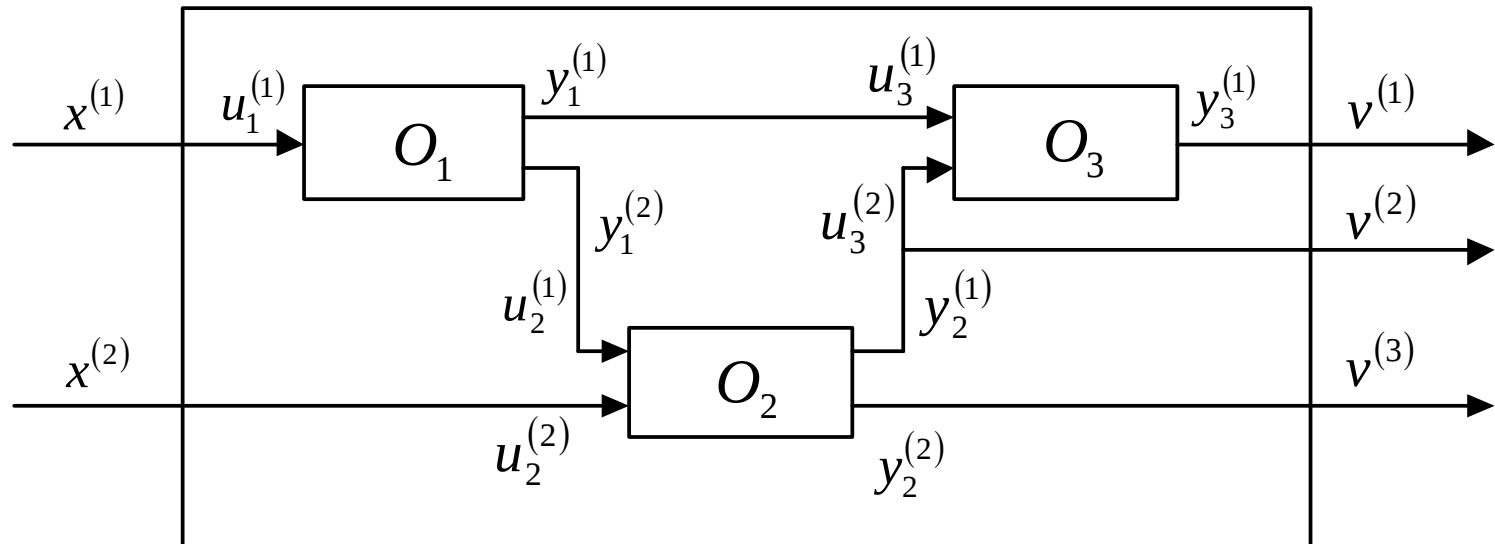
gdzie: $\tau_0 = \frac{l}{v}$ - opóźnienie czasowe

v - prędkość

l - długość

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-s\tau_0}$$

Opis systemu złożonego



Przykład systemu złożonego

Sterowalność Obserwowalność



$u(t)$ - Sygnał wejściowy (ciągły) $\dim u(t) = S$

$y(t)$ - Sygnał wyjściowy (ciągły) $\dim y(t) = L$

$x(t)$ - Wektor stanu systemu $\dim x(t) = K$

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A - (K \times K), B - (K \times S),$$

$$C - (L \times K), D - (L \times S)$$

Sterowalność względem stanu:

$$H \overset{\Delta}{=} [B : AB : A^2B : \dots : A^{K-1}B] \quad rzH = K \quad \dim u = 1 \quad \det H \neq 0$$

Sterowalność względem wyjścia:

$$Q \overset{\Delta}{=} [D : CB : CAB : CA^2B : \dots : CA^{K-1}B] \quad rzQ = K + 1 \quad \dim u = \dim y = 1 \quad \det Q \neq 0$$

Obserwowalność:

$$G \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{K-1} \end{bmatrix} \quad rzG = K \quad \dim u = 1 \quad \det G \neq 0$$

Stabilność układu - obiekty ciągłe

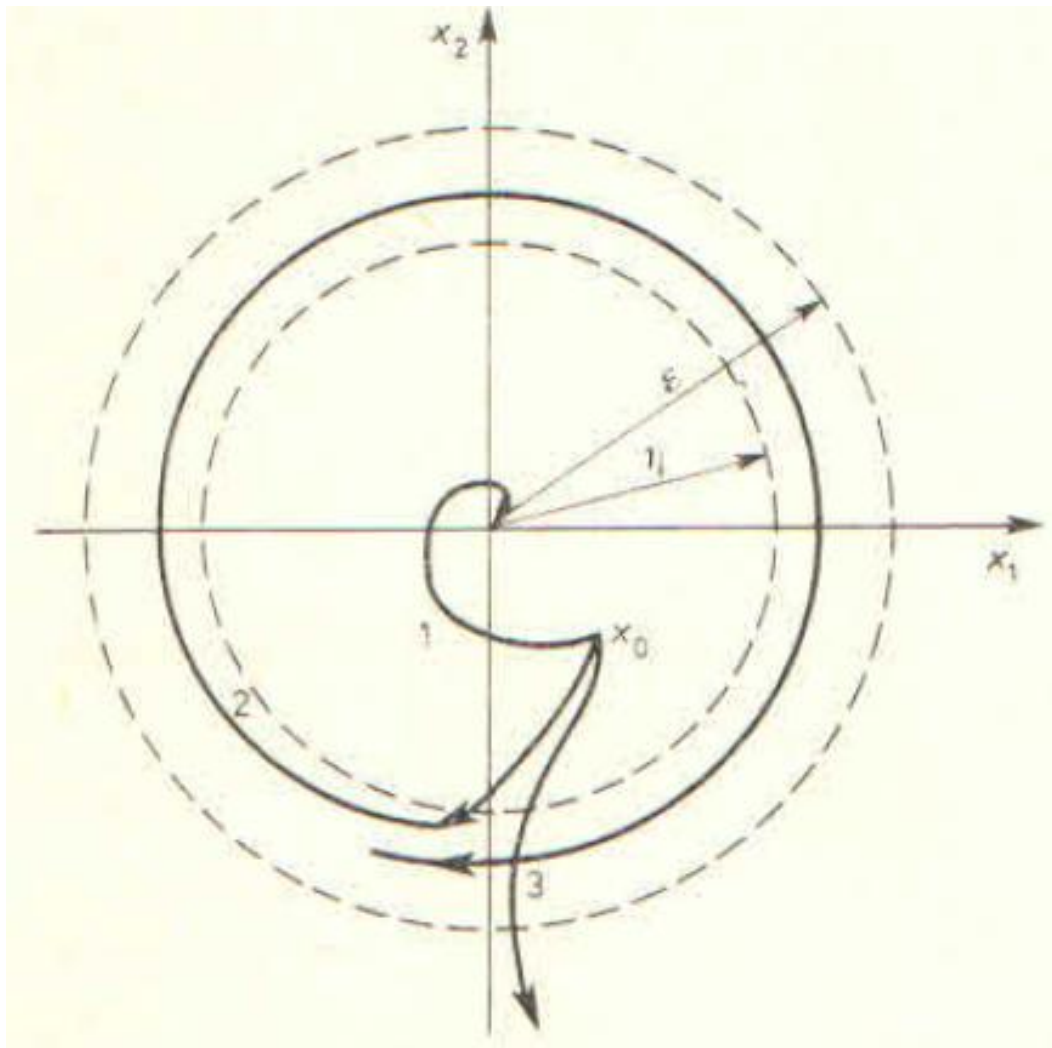
Układ jest stabilny jeżeli wytrącony ze stanu równowagi zostanie sprowadzony do stanu równowagi

Definicja stabilności w sensie Lapunowa

Punkt równowagi $x_r = 0$ nazywamy stabilnym jeżeli
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0$, że trajektorie rozpoczynające się w punkcie
 $x_0 \in O(x_r, \eta)$ dla dowolnej chwili t , $x(t) \in O(x_r, \varepsilon)$

Jeżeli ponadto $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ to punkt $x_r = 0$ nazywamy
asymptotycznie stabilnym

Stabilność układu



Przykładowy przebieg trajektorii:

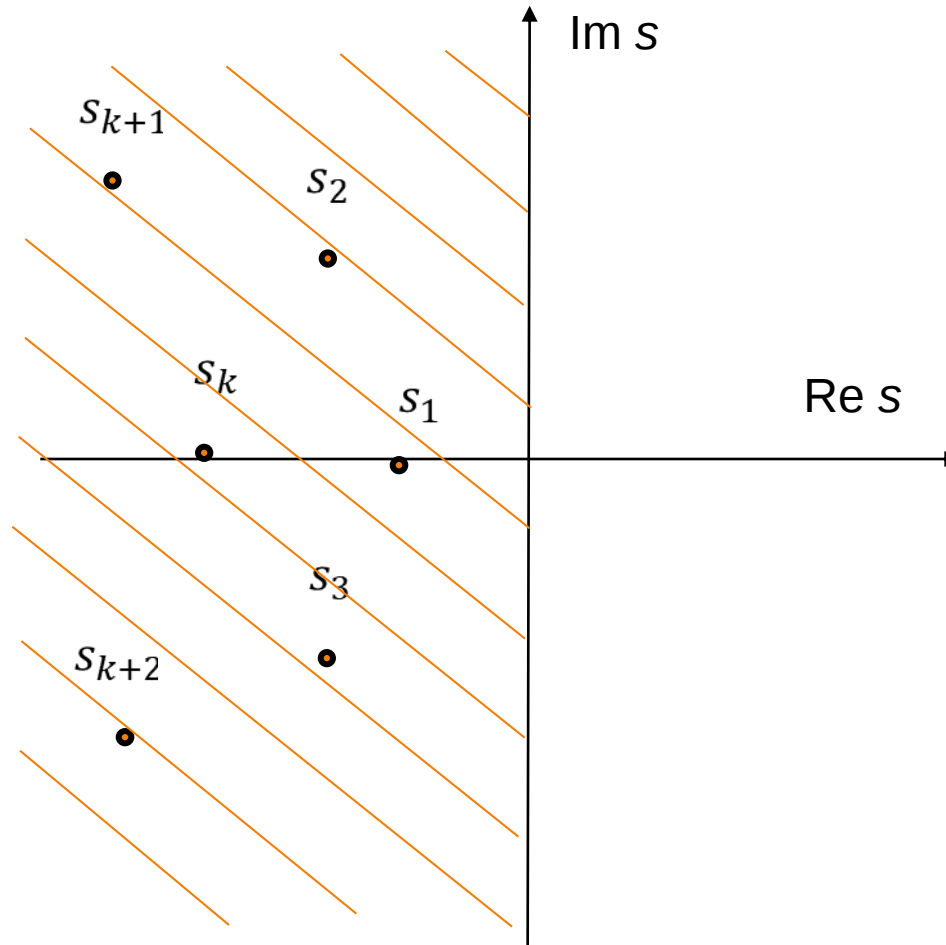
- 1 – Układ stabilny asymptotycznie
- 2 – Układ stabilny, ale nie asymptotycznie
- 3 – Układ niestabilny

Stabilność układu

Warunek konieczny i dostateczny stabilności układów ciągłych liniowych.

Układ liniowy stacjonarny opisany równaniem $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ jest stabilny wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie wartości własne macierzy A mają niedodatnie części rzeczywiste i każda wartość własna o zerowej części rzeczywistej jest pierwiastkiem jednokrotnym wielomianu minimalnego macierzy A .

Stabilność układu



Kryterium stabilności

Kryterium Hurwitza

$$\Psi(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Ma pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie???

$$a_n > 0$$

$$\Delta_1 = |a_{n-1}| > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0$$

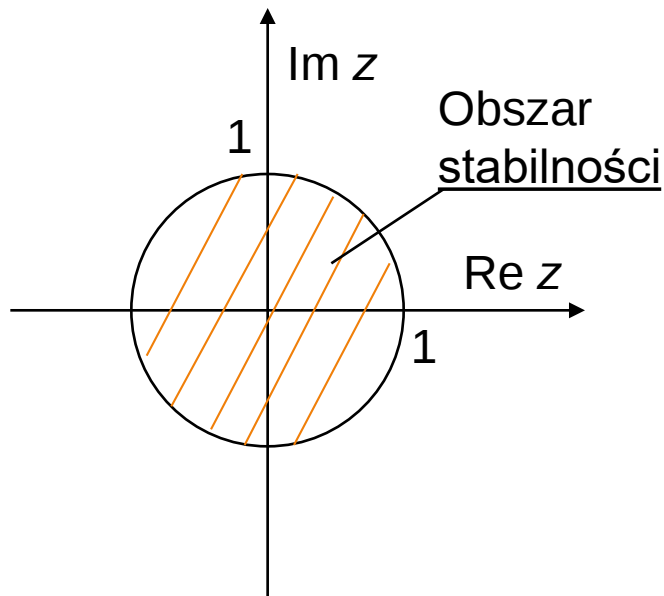
$\vdots$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \end{vmatrix} > 0$$

Stabilność układu

Warunek konieczny i dostateczny stabilności układów ciągłych liniowych.

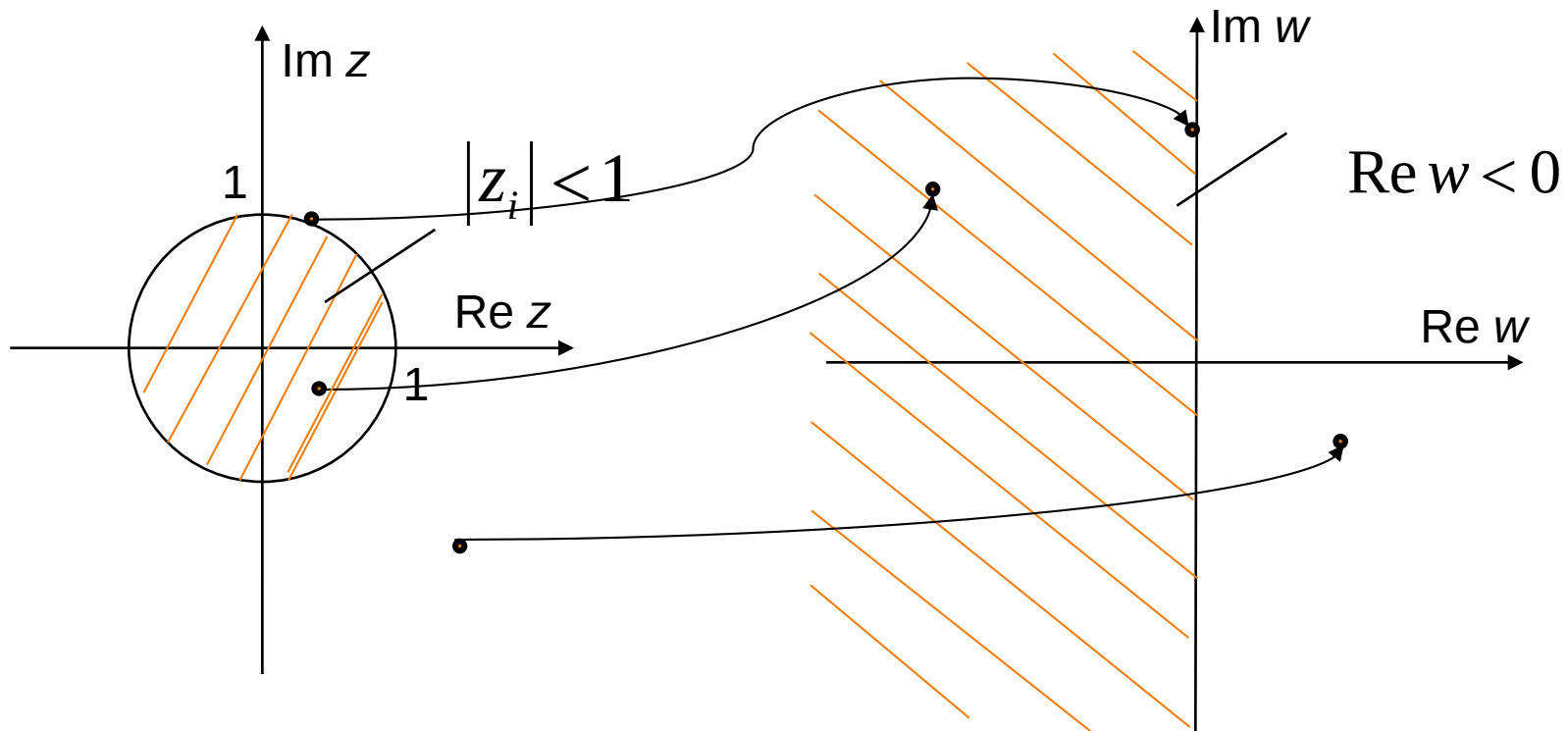
Układ liniowy stacjonarny opisany równaniem $x_{n+1} = Ax_n$ jest stabilny wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie wartości własne macierzy A leżą we wnętrzu okręgu o promieniu jeden na płaszczyźnie zespolonej z .



Jak to zbadać

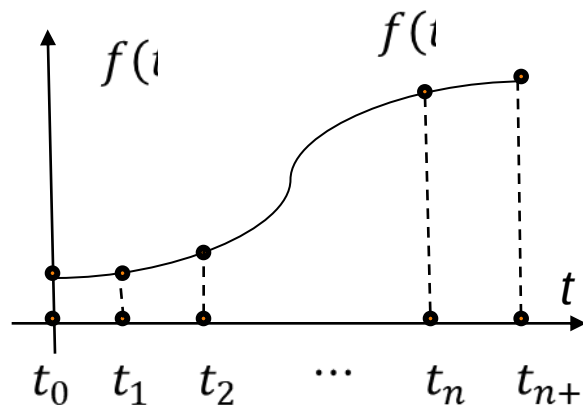
Dokonajmy przekształcenia: $z = \frac{1+w}{1-w}$

Takie przekształcenie dokonuje transformacji wnętrza koła o promieniu jeden w przestrzeni z w lewą półpłaszczyznę w przestrzeni s



Dyskretyzacja sygnału ciągłego

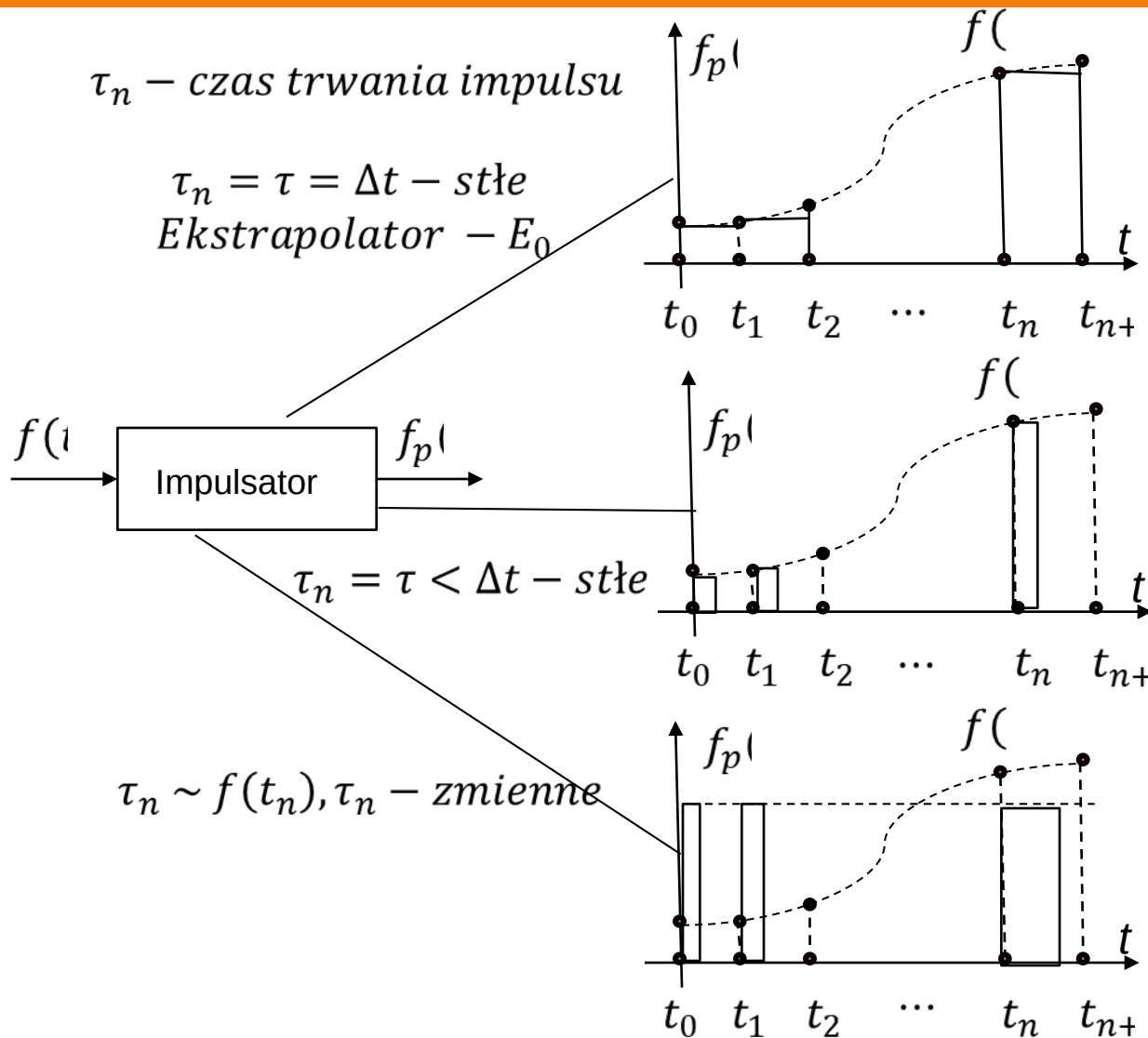
$$f(t), f(t) = 0 \text{ dla } t < 0$$



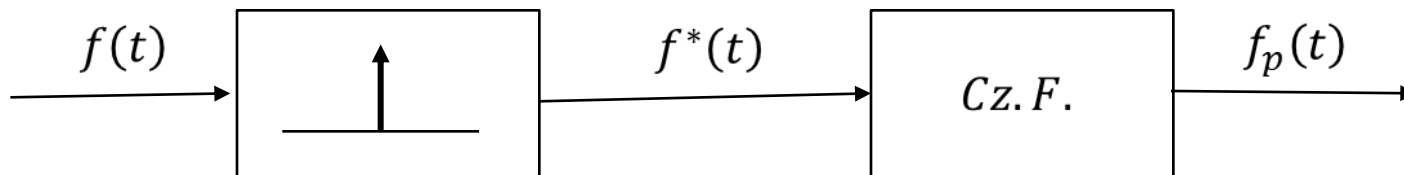
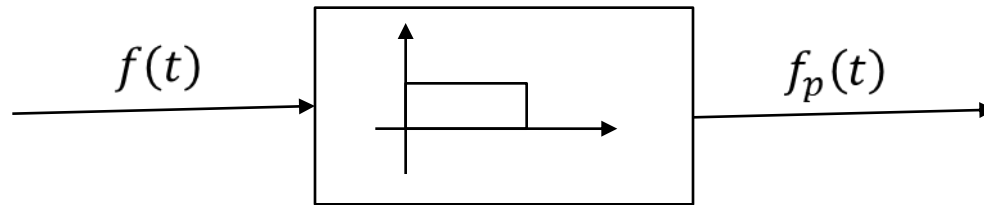
$$t_n = t_0 + n\Delta t$$

$$t_0 = 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Δt – okres dyskretyzacji



Impulsator

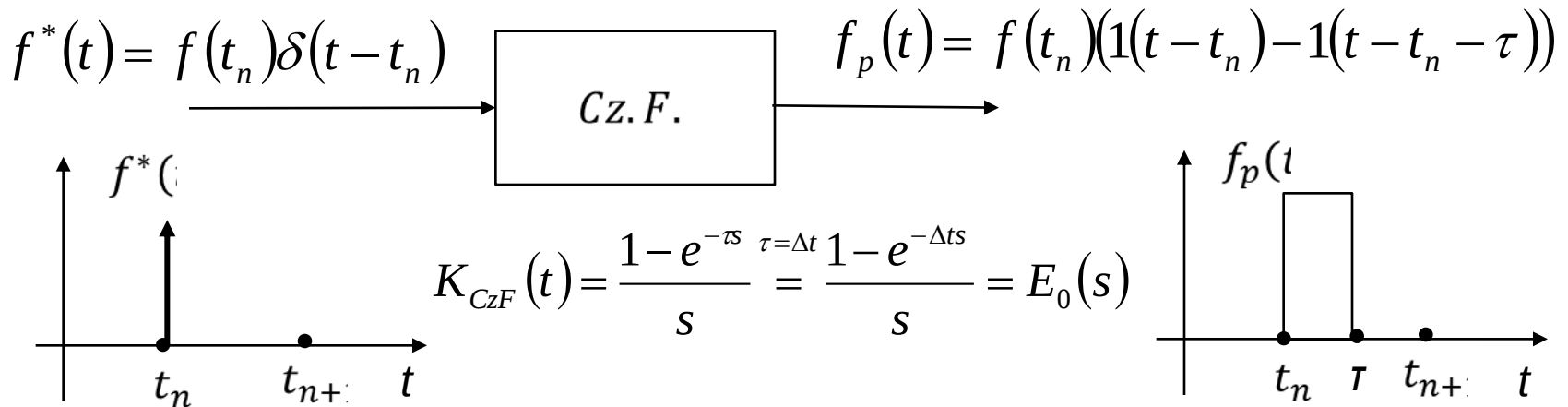


Impulsator
idealny

Człon
Formułujący

Człon formuujący

szerokość impulsu – $\tau < \Delta t$ – stałe

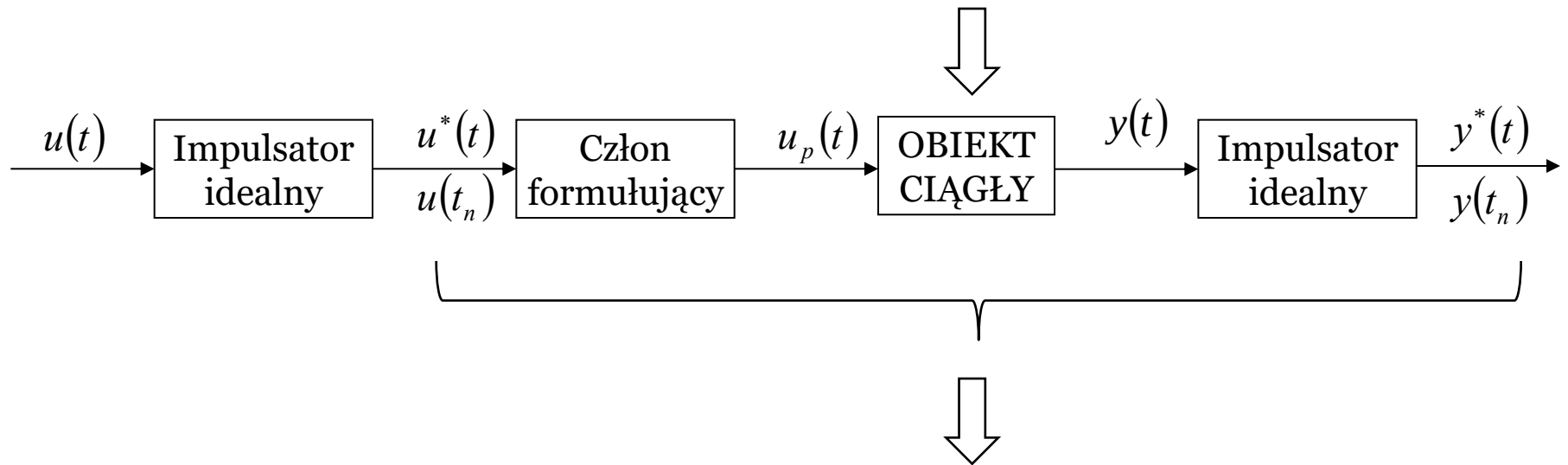


$$\begin{aligned}
 K_{CzF}(s) &= \frac{\mathcal{L}[f_p(t)]}{\mathcal{L}[f^*(t)]} = \frac{\mathcal{L}[f(t_n)(1(t - t_n) - 1(t - t_n - \tau))]}{\mathcal{L}[f(t_n)\delta(t - t_n)]} = \\
 &= \frac{f(t_n) \left(\frac{1}{s} e^{-t_n s} - \frac{1}{s} e^{-(t_n - \tau)s} \right)}{f(t_n) e^{-t_n s}} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-\tau s} = \frac{1 - e^{-\tau s}}{s}
 \end{aligned}$$

Relacje pomiędzy opisami

Równania stanu

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$



$$x_{n+1} = \bar{A}x_n + \bar{B}u_n$$

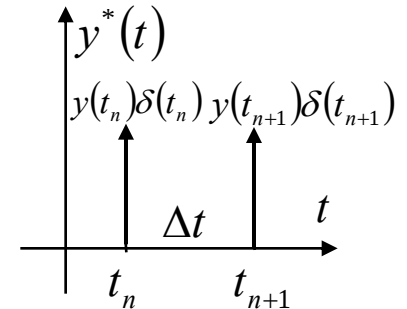
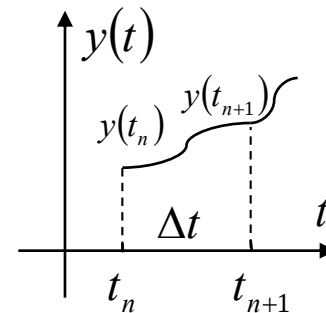
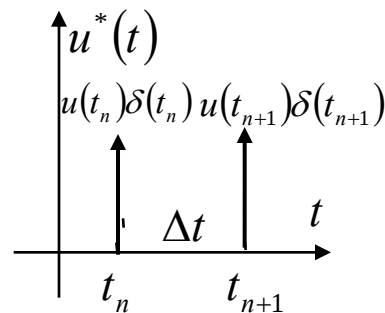
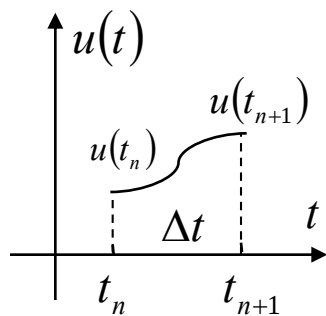
$$y_n = \bar{C}x_n + \bar{D}u_n$$

Relacje pomiędzy opisami

Równania stanu

Opis przy pomocy równań stanu – impulsator idealny bez członu formułującego

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x_0 = x(t_0), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$



Relacje pomiędzy opisami

Równania stanu

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x_0 = x(t_0), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t_{n+1}) = e^{A(t_{n+1}-t_n)}x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{A(t_{n+1}-\tau)}Bu^*(\tau)d\tau, \quad u^*(\tau) = u(t_n)\delta(\tau - t_n)$$

$$x(t_{n+1}) = e^{A(t_{n+1}-t_n)}x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{A(t_{n+1}-\tau)}Bu(t_n)\delta(\tau - t_n)d\tau$$

$$x(t_{n+1}) = e^{A(t_{n+1}-t_n)}x(t_n) + e^{A(t_{n+1}-t_n)}Bu(t_n) = e^{A\Delta t}x(t_n) + e^{A\Delta t}Bu(t_n)$$

niech: $x(t_n) = x_n, \quad u_n = u(t_n), \quad y_n = y(t_n)$

$$\begin{array}{lcl} x_{n+1} = e^{A\Delta t}x_n + e^{A\Delta t}Bu_n & \Rightarrow & \bar{A}x_n + \bar{B}u_n \\ y_n = Cx_n + Du_n & & \bar{C}x_n + \bar{D}u_n \end{array}$$

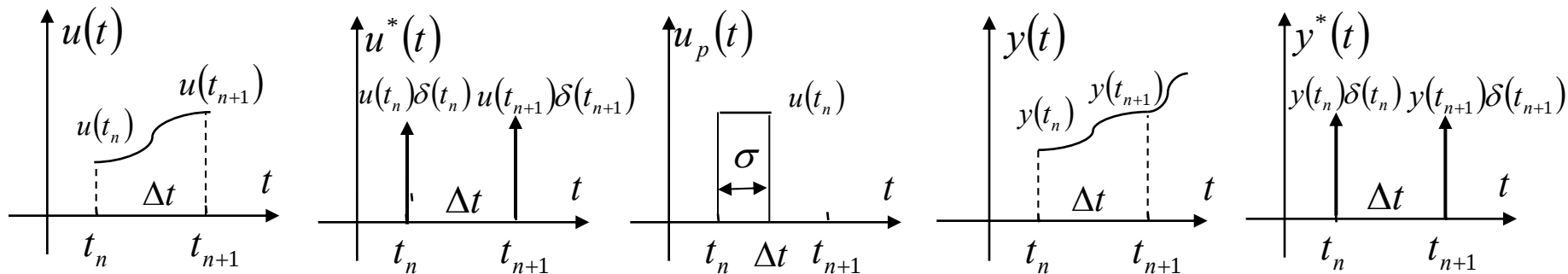
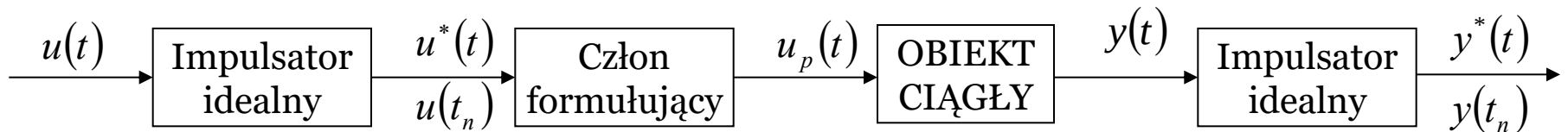
gdzie: $\bar{A} = e^{A\Delta t}, \quad \bar{B} = e^{A\Delta t}B, \quad \bar{C} = C, \quad \bar{D} = D$

Relacje pomiędzy opisami

Równania stanu

Opis przy pomocy równań stanu – impulsator z członem formułującym

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x_0 = x(t_0), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$



Relacje pomiędzy opisami

Równania stanu

$$x(t_{n+1}) = e^{A(t_{n+1}-t_n)}x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{A(t_n-\tau)}Bu^*(\tau)d\tau, \quad u^*(\tau) = \begin{cases} u(t_n) & \text{dla } t_n \leq \tau \leq t_n + \sigma \\ 0 & \text{dla } t_n + \sigma \leq \tau \leq t_{n+1} \end{cases}$$

$$x(t_{n+1}) = e^{A(t_{n+1}-t_n)}x(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+\sigma} e^{A(t_{n+1}-\tau)}Bu(t_n)d\tau = e^{A\Delta t}x(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+\sigma} e^{A(t_n+\Delta t-\tau)}Bu(t_n)d\tau$$

$$\text{niech: } \bar{\tau} = \Delta t - \sigma \quad x(t_{n+1}) = e^{A\Delta t}x(t_n) + \int_{\Delta t-\sigma}^{\Delta t} e^{A\bar{\tau}}Bd\bar{\tau} u(t_n)$$

$$\text{niech: } x(t_n) = x_n, \quad u_n = u(t_n), \quad y_n = y(t_n)^{\Delta t}$$

$$x_{n+1} = e^{A\Delta t}x_n + u_n \int_{\Delta t-\sigma}^{\Delta t} e^{A\bar{\tau}}Bd\bar{\tau} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= \bar{A}x_n + \bar{B}u_n \\ y_n &= \bar{C}x_n + \bar{D}u_n \end{aligned}$$

$$y_n = Cx_n + Du_n$$

$$\text{gdzie: } \bar{A} = e^{A\Delta t}, \quad \bar{B} = \int_{\Delta t-\sigma}^{\Delta t} e^{A\bar{\tau}}Bd\bar{\tau}, \quad \bar{C} = C, \quad \bar{D} = D$$

Szczególny

$\sigma = \Delta t$ **Ekstrapolator rzędu**

E_0

przypadek:

zerowego -

$$\bar{B} = \int_{\Delta t-\sigma}^{\Delta t} e^{A\bar{\tau}}Bd\bar{\tau} = \int_0^{\Delta t} e^{A\bar{\tau}}Bd\bar{\tau} = A^{-1}[e^{A\Delta t} - I]B$$

Literatura

⌘ LITERATURA PODSTAWOWA:

- ⌘ Brzostowski K., Drapała J. – *Systems modelling and identification*, skrypt PWr.
- ⌘ Gutenbaum J., Modelowanie matematyczne systemów, Instytut Badań Systemowych PAN, 2003.
- ⌘ Osowski S., *Modelowanie i symulacja układów i procesów dynamicznych*, 2007.
- ⌘ Ljung L., Glad T., *Modelling of dynamic systems*, 1994.

⌘

⌘ LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA:

- ⌘ Fishwick P.A., *Handbook of Dynamic System Modelling*, Chamman & Hall/CRS Taylor & Francis Group, London, New York, 2007.
- ⌘ Logan J.D., *A First Course in Differential Equations*, Springer, 2006.
- ⌘ L.F. Shampine, I. Gladwell, S. Thompson – *Solving ODEs with MATLAB*, Cambridge Univ. Press, 2003.

Kolokwium zaliczeniowe

- ⌘ Termin zero zaliczenia: 22.06.2026 (poniedziałek)
sala 22, budynek C-3, godzina 7³⁰-7⁴⁵
- ⌘ Termin zaliczenia: 22.06. 2026 (poniedziałek)
sala 22, budynek C-3, godzina 7⁴⁵-9⁰⁰

Termin „zero” - zasady

- ✂ Pozytywne aktualne (tegoroczne) zaliczenie form pomocniczych ≥ 3.0
- ✂ Propozycja oceny – wartość średnia z części całkowitej sumy ocen form pomocniczych

$$\text{tj.: propozycja oceny} = \frac{[\text{ćwiczenia} + \text{laboratoria}]}{2} \geq 3.5$$

- ✂ Obecność na ostatnim wykładzie
- ✂ Nieobecni (bez względu na przyczynę) rezygnują ze zwolnienia
- ✂ Można wcześniej ale nie po terminie 0. Należy przedstawić potwierdzoną ocenę.

Osoby, które mają zaliczenie form pomocniczych z ubiegłych lat proszę o przedstawienie udokumentowanej oceny przed terminem „zero”

Dziękuję za uwagę

