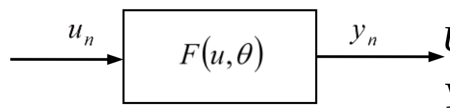
Metody Systemowe i Decyzyjne w Informatyce

Wykład 2c . Identyfikacja obiektów dynamicznych

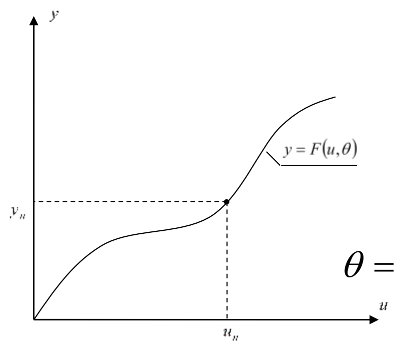
Podstawowe zadania identyfikacji
podsumowanie

Deterministyczny

Obiekt w klasie modeli

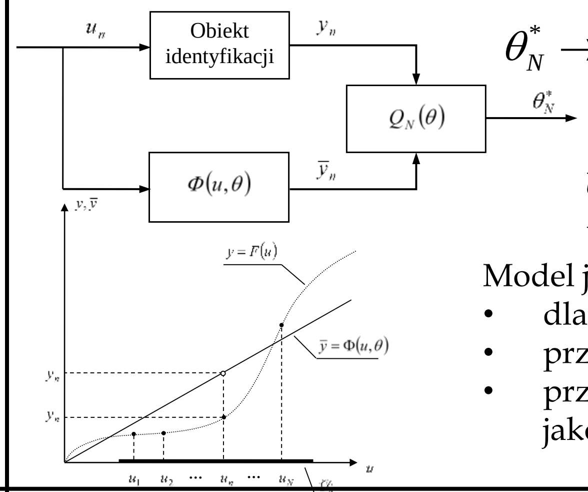


$$U_N = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N],$$
$$Y_N = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_N]$$



$$y_n = F(u_n, \theta),$$
$$n = 1, 2, \ldots, N$$
$$Y_N = \overline{F}(U_N, \theta)$$
$$\theta = \overline{F}^{-1}(U_N, Y_N) \overset{df}{=} \Psi_N(U_N, Y_N)$$

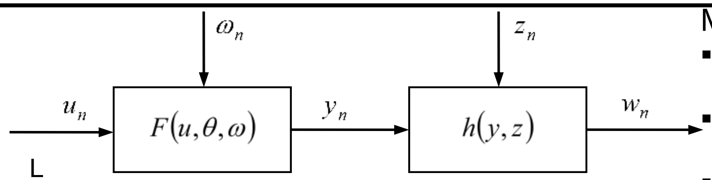
Wybór optymalnego modelu



$$\bar{y} = \Phi(u, \theta_N^*)$$
$$\theta_N^* \rightarrow Q_N(\theta_N^*) = \min_{\theta} Q_N(\theta)$$
$$\theta_N^* = \Psi_N(U_N, Y_N)$$
$$U_N = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N],$$
$$Y_N = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_N]$$

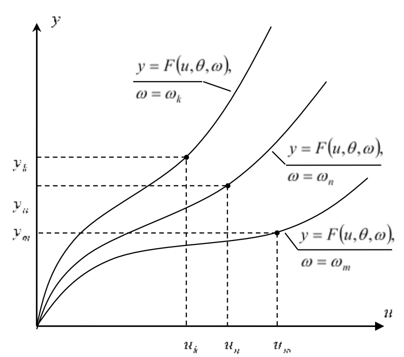
Model jest optymalny:
- dla zadanej serii pomiarowej
- przyjętego modelu
- przyjętego wskaźnika jakości identyfikacji

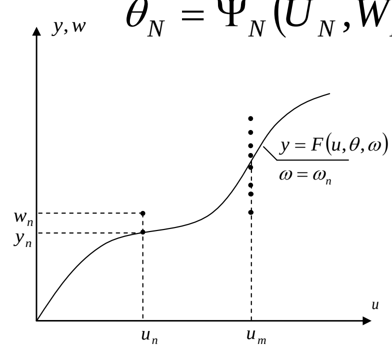
Losowy

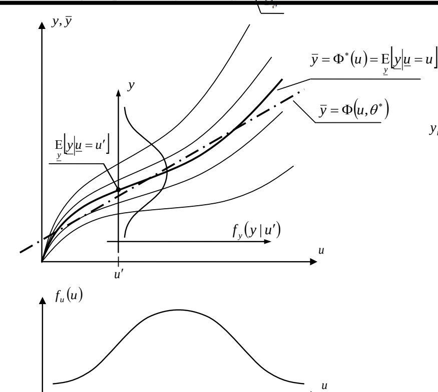


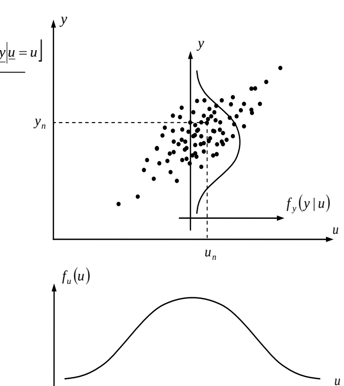
Metody:
- Najmniejszych kwadratów
- Maksymalnej wiarogodności
- Bayes'a

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N)$$









Pełna informacja
- Regresja I rodzaju
- Regresja II rodzaju

Niepełna informacja
- Estymacja wskaźnika jakości
- Estymacja parametrów rozkładu
- Estymacja rozkładu

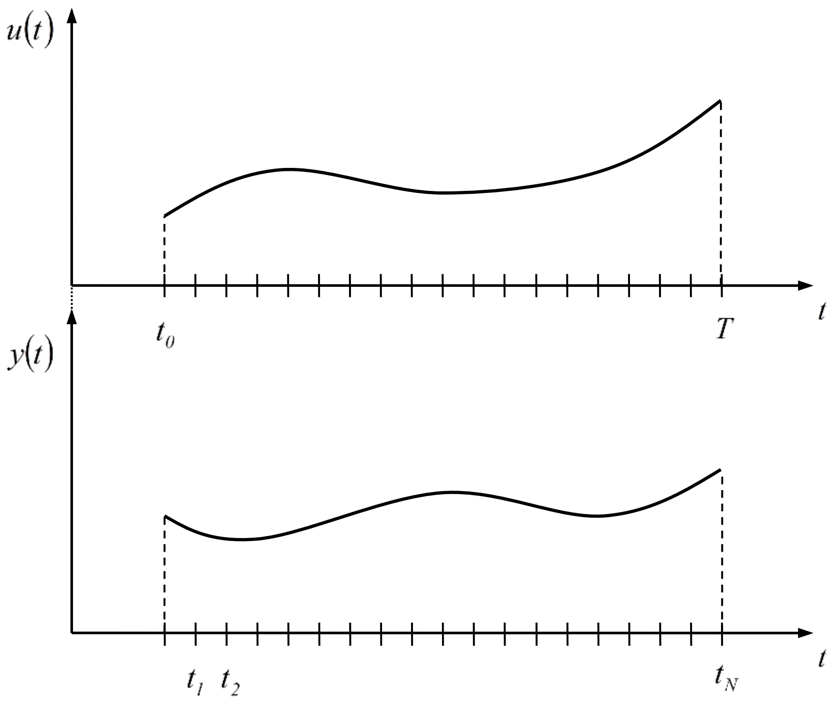
Identyfikacja obiektów dynamicznych

Opisy:

- Zmienne stanu;
- Równanie różniczkowe/różnicowe;
- Transmitancja: $K(s)$, $K(z)$;
- Odpowiedź impulsowa: $k_i(t)$, k_{in} ;
- Odpowiedź na skok jednostkowy: $h(t)$, h_n

Identyfikacja obiektów dynamicznych
Obiekt ciągły

Dla sygnału wejściowego $\{u(t)\}_{t_0}^{T}$ rejestrujemy sygnał wyjściowy : $\{y(t)\}_{t_0}^{T}$



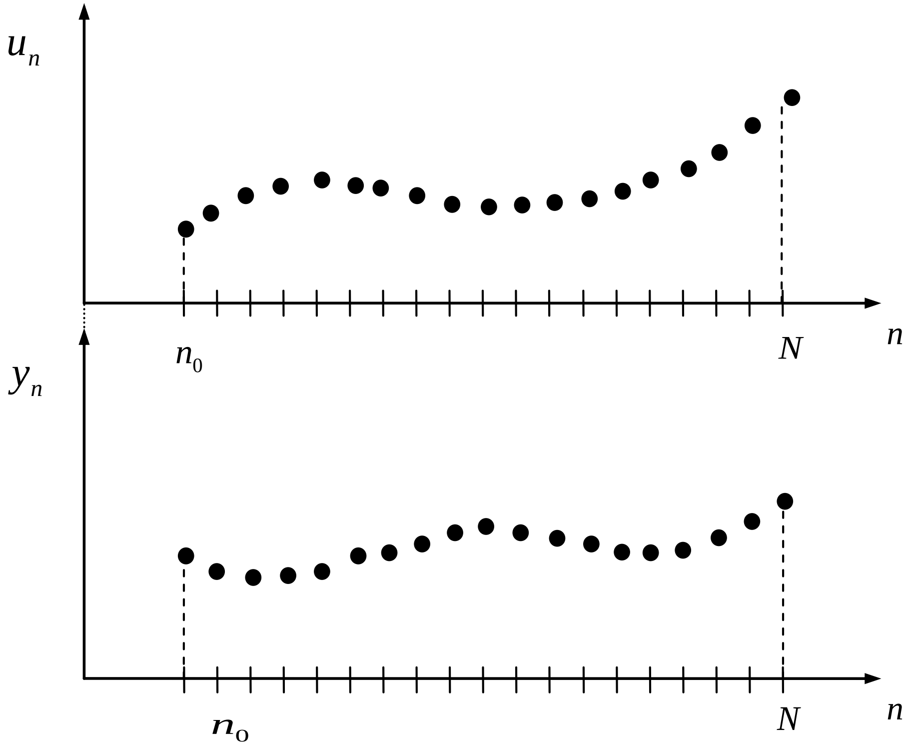
$$t_0 < t_1 < \ldots < t_N \leq T$$

$$\{u(t_n)\}_{n=0}^{N}$$

$$\{y(t_n)\}_{n=0}^{N}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych
Obiekt dyskretny

Dla zadanego wejścia u_n mierzymy wartość wyjścia y_n:



$$\{u_n\}_{n=0}^{N}$$

$$\{y_n\}_{n=0}^{N}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych
Równanie różniczkowe

Załóżmy, że obiekt opisany jest równaniem:

$$F\left(\frac{d^m y(t)}{dt^m}, \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}}, \ldots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t); \frac{d^v u(t)}{dt^v}, \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}}, \ldots, \frac{du(t)}{dt}, u(t); \theta\right) = 0, \qquad m \geq v$$

z warunkami początkowymi w_0

Należy wyznaczyć nieznane parametry opisu θ .

Identyfikacja obiektów dynamicznych
Równanie różniczkowe

Jeżeli opis wejścia $u(t)$ jest zadany analitycznie np.:

$$u(t) = \mathbf{1}(t) \qquad\qquad u(t) = A\sin(\omega t)$$

wówczas możliwe jest analityczne rozwiązanie równania:

$$y(t) = \mathscr{F}\left(\{u(\tau)\}_{\tau=t_0}^{t}, w_0; \theta\right)$$

Zatem dla każdego punktu pomiarowego otrzymujemy:

$$y(t_n) = \mathscr{F}\left(\{u(\tau)\}_{\tau=t_0}^{t_n}, w_0; \theta\right), \quad n = 1,2,\ldots,N$$

Rozwiązanie powyższego układu równań względem θ daje algorytm identyfikacji

Identyfikacja obiektów dynamicznych Równanie różniczkowe

Przykład

$$\frac{dy(t)}{dt} = \theta u(t)$$

Sygnał wejściowy: $u(t) = \mathbf{1}(t)$

Warunki początkowe: $y(0) = 0$

Rozwiązanie równania: $y(t) = \theta \int_o^t u(\tau) d\tau = \theta \int_0^t 1(\tau) d\tau = \theta t$

Dla n – tego pomiaru mamy: $y(t_n) = \theta t_n$

Stąd: $$\theta = \frac{y(t_n)}{t_n}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych
Równanie różniczkowe

Pomiary: $\{u(t_n)\}_{n=0}^{N}$ $\{y(t_n)\}_{n=0}^{N}$

Numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\tilde{y}(t_n,\theta)=\mathscr{F}_N\left(\{u(t_k)\}_{k=0}^{n},w_0;\theta\right) \qquad y(t_n)\approx\tilde{y}(t_n,\theta)$$

$$\theta\approx\theta_N\to\min\underbrace{\sum_{n=0}^{N}\left(y(t_n)-\tilde{y}(t_n,\theta)\right)^2}_{B(\theta)}=\min\underbrace{\sum_{n=0}^{N}\left(y(t_n)-\mathscr{F}_N\left(\{u(t_k)\}_{k=0}^{n},w_0;\theta\right)\right)^2}_{B(\theta)}$$

gdzie:

$B(\theta)$ – błąd procedury numerycznej

Identyfikacja obiektów dynamicznych Równanie różniczkowe

$B(\theta)$ nie jest dane w postaci analitycznej, stąd do wyznaczenia rozwiązania konieczność stosowania optymalizacyjnej numerycznej procedury poczynając od θ_0 :

$$\theta_0 \to \tilde{y}(t_n, \theta_0) \to B(\theta_0)$$

$$\theta_1 \to \tilde{y}(t_n, \theta_1) \to B(\theta_1)$$

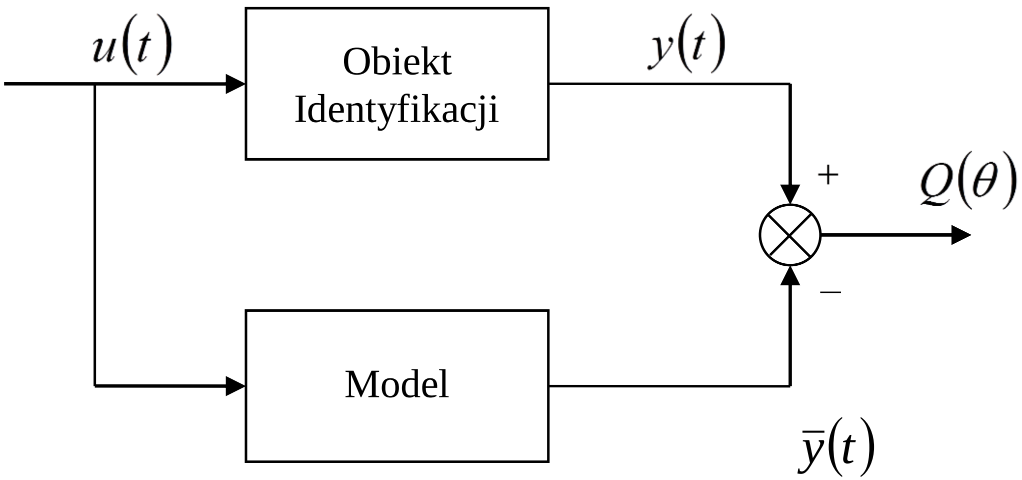
$$\vdots$$

$$\theta_K \to \tilde{y}(t_n, \theta_K) \to B(\theta_K)$$

$$\theta_K \approx \theta$$

K – liczba kroków procedury numerycznej optymalizacji

Identyfikacja obiektów dynamicznych
Równanie różniczkowe - wybór optymalnego modelu



$$\Phi\left(\frac{d^m \bar{y}(t)}{dt^m}, \frac{d^{m-1} \bar{y}(t)}{dt^{m-1}}, \ldots, \frac{d\bar{y}(t)}{dt}, \bar{y}(t);\ \frac{d^v u(t)}{dt^v}, \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}}, \ldots, \frac{du(t)}{dt}, u(t);\ \theta \right) = 0$$

w_0 - warunki początkowe

Identyfikacja obiektów dynamicznych
Równanie różniczkowe - wybór optymalnego modelu

1. $u(t)$ jest zadane analitycznie, np.: $u(t) = \mathbf{1}(t)$, $u(t) = A\sin(\omega t)$;

Model – rozwiązanie równania :

$$\bar{y}(t,\theta) = \tilde{\Phi}\left(\{u(\tau)\}_{\tau=t_0}^{t}, w_0; \theta\right)$$

Wskaźnik jakości identyfikacji:

$$Q(\theta) = \int_{t_0}^{T} \left(y(t) - \bar{y}(t,\theta)\right)^2 dt = \int_{t_0}^{T} \left(y(t) - \tilde{\Phi}\left(\{u(\tau)\}_{\tau=t_0}^{t}, w_0; \theta\right)\right)^2 dt$$

Zadanie optymalizacji:

$$\theta^* \rightarrow Q(\theta^*) = \min_{\theta \in \Theta} Q(\theta)$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych
Równanie różniczkowe - wybór optymalnego modelu

Przykład:

Model:
$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \theta u(t)$$

Sygnał wejściowy:
$$u(t) = \mathbf{1}(t)$$

Warunki początkowe:
$$y(0) = 0$$

Rozwiązanie równania :
$$\bar{y}(t) = \theta \int_{o}^{t} u(\tau) d\tau = \theta t$$

Wskaźnik jakości:
$$Q(\theta) = \int_{0}^{T} \left(y(t) - \theta t\right)^2 dt$$

Optymalny parametr:
$$\theta^* = \frac{\int_0^T y(t) t dt}{\int_0^T t^2 dt}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych
Równanie różniczkowe - wybór optymalnego modelu

2. Dyskretne pomiary wyjścia $\{y(t_n)\}_{n=0}^{N}$ dla zadanego wejścia $\{u(t)\}_{t_0}^{T}$

Wskaźnik jakości:
$$Q_N(\theta) = \sum_{n=0}^{N} \left(y(t_n) - \tilde{\Phi}\left(\{u(\tau)\}_{\tau=t_0}^{t_n}, w_0; \theta \right) \right)^2$$

Optymalny parametr modelu:
$$\theta_N^* \to Q_N(\theta_N^*) = \min_{\theta \in \Theta} Q_N(\theta)$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych
Równanie różniczkowe - wybór optymalnego modelu

2. Pomiary: $\{u(t_n)\}_{n=0}^{N}$, $\{y(t_n)\}_{n=0}^{N}$;

Rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\tilde{\bar{y}}_N(t_n,\theta)=\tilde{\Phi}_N\left(\{u(t_k)\}_{k=0}^{n},w_0;\theta\right)$$

Wskaźnik jakości:

$$Q_N(\theta)=\sum_{n=0}^{N}\left(y(t_n)-\tilde{\bar{y}}_N(t_n,\theta)\right)^2=\sum_{n=0}^{N}\left(y(t_n)-\tilde{\Phi}_N\left(\{u(t_k)\}_{k=0}^{n},w_0;\theta\right)\right)^2$$

Optymalny parametr modelu:

$$\theta_N^* \to Q_N(\theta_N^*)=\min_{\theta\in\Theta} Q_N(\theta)$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych
Równanie różniczkowe - wybór optymalnego modelu

$Q_N(\theta)$ nie jest dane w postaci analitycznej, stąd do wyznaczenia rozwiązania konieczność stosowania optymalizacyjnej numerycznej procedury poczynając od θ_0 :

$$\theta_0 \rightarrow \bar{y}(t_n, \theta_0) \rightarrow Q_N(\theta_0)$$

$$\theta_1 \rightarrow \bar{y}(t_n, \theta_1) \rightarrow Q_N(\theta_1)$$

$$\vdots$$

$$\theta_K \rightarrow \bar{y}(t_n, \theta_K) \rightarrow Q_N(\theta_K)$$

$$\theta_K^* \approx \theta_N^*$$

K – liczba kroków procedury numerycznej optymalizacji

Dziękuję za uwagę