

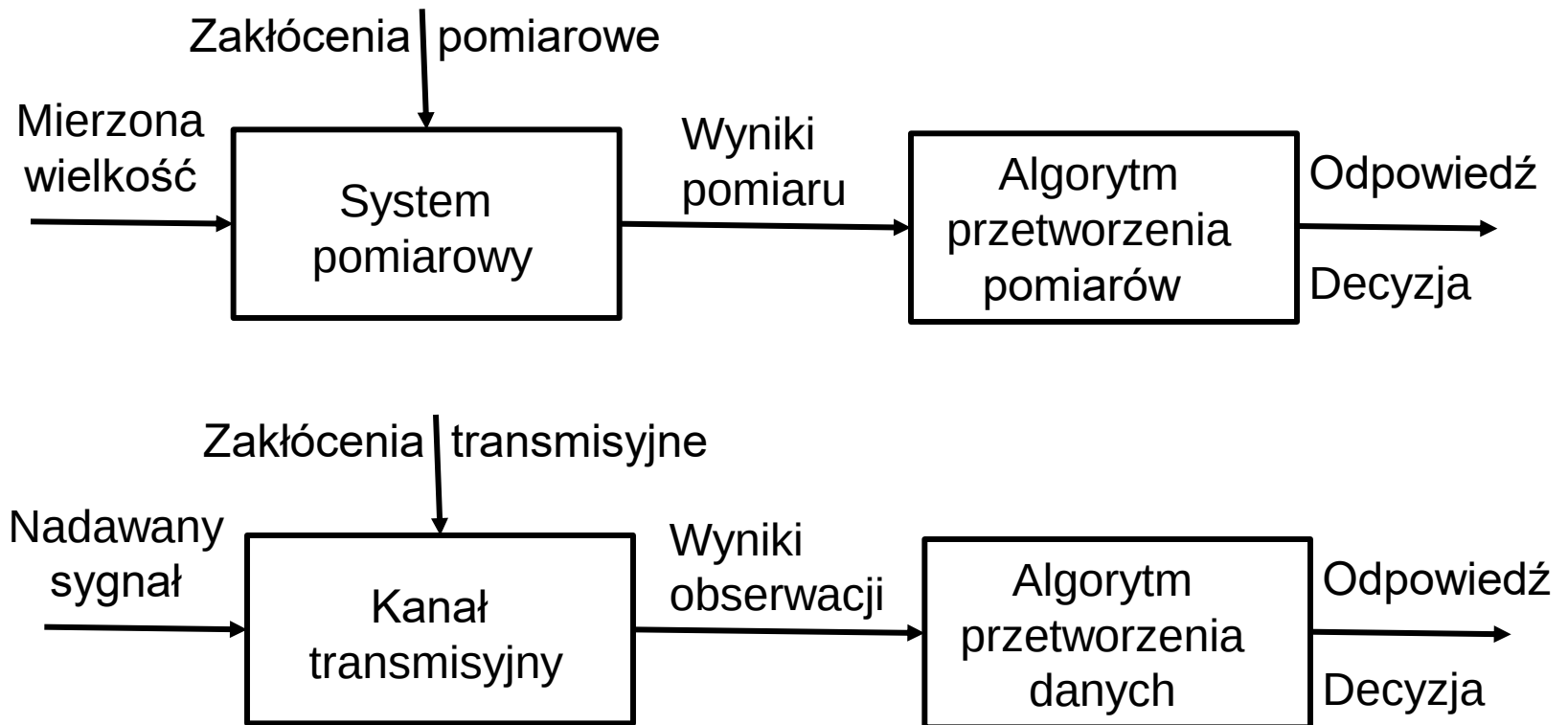
Metody Systemowe i Decyzyjne w Informatyce



Wykład 9b. Optymalny pomiar

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

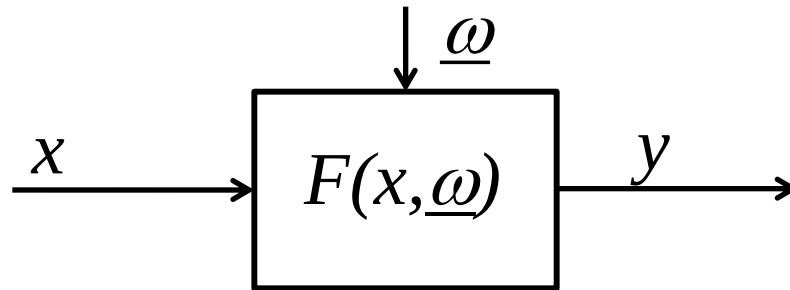
☞ Sformułowanie problemu



Niepewność – zmienna losowa



Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności



$$F(x) = E_{\underline{\omega}}[F(x, \underline{\omega})]$$

$$\mathcal{D}_x = E_{\underline{\omega}}[\mathcal{D}_x(\underline{\omega})] =$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{R}^S; E_{\underline{\omega}}[\varphi_l(x, \underline{\omega})] = 0, l = 1, \dots, L, E_{\underline{\omega}}[\psi_m(x, \underline{\omega})] \leq 0, m = 1, \dots, M \right\}$$

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in D_x} F(x)$$

Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności

ω - wartość zmiennej losowej $\underline{\omega}$

$\omega \in \Omega$ - zbiór ciągły, $f_{\omega}(\omega)$ - funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\underline{\omega}$

Wówczas:

$$F(x) = \underset{\underline{\omega}}{E}[F(x, \underline{\omega})] = \int_{\Omega} F(x, \omega) f_{\omega}(\omega) d\omega$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x &= \underset{\underline{\omega}}{E}[\mathcal{D}_x(\underline{\omega})] = \\ &= \left\{ x \in \mathcal{R}^S; \underset{\underline{\omega}}{E}[\varphi_l(x, \underline{\omega})] = \int_{\Omega} \varphi_l(x, \omega) f_{\omega}(\omega) d\omega = 0, l = 1, \dots, L, \right. \\ &\quad \left. \underset{\underline{\omega}}{E}[\psi_m(x, \underline{\omega})] = \int_{\Omega} \psi_m(x, \omega) f_{\omega}(\omega) d\omega \leq 0, m = 1, \dots, M \right\} \end{aligned}$$

Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności

ω - wartość zmiennej losowej $\underline{\omega}$

$\omega \in \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$ - zbiór dyskretny,

$P(\underline{\omega} = \omega_k) = p_k, k = 1, 2, \dots, K$ - gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\underline{\omega}$

Wówczas:

$$F(x) = E_{\underline{\omega}}[F(x, \underline{\omega})] = \sum_{k=1}^K F(x, \omega_k) p_k$$

$$\mathcal{D}_x = E_{\underline{\omega}}[\mathcal{D}_x(\underline{\omega})] =$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{R}^S; E_{\underline{\omega}}[\varphi_l(x, \underline{\omega})] = \sum_{k=1}^K \varphi_l(x, \omega_k) p_k = 0, l = 1, \dots, L, \right.$$

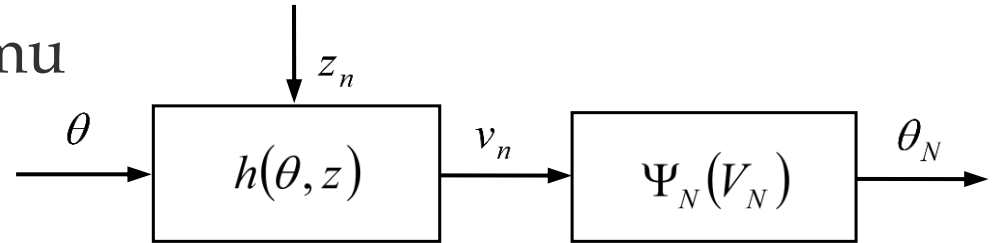
$$\left. E_{\underline{\omega}}[\psi_m(x, \underline{\omega})] = \sum_{k=1}^K \psi_m(x, \omega_k) p_k \leq 0, m = 1, \dots, M \right\}$$

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ 7 ∞

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ Sformułowanie problemu



Opis systemu pomiarowego: $v = h(\theta, z)$

gdzie: $v \in \mathcal{V}$, h - znana funkcja, wzajemnie jednoznaczna względem z

$$h: \Theta \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{V}, \quad z = h_z^{-1}(\theta, v)$$

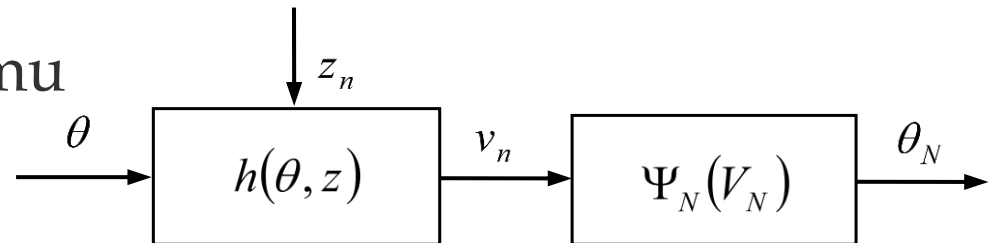
Przykłady funkcji h : $v = h(\theta, z) = \theta + z$

$$v = h(\theta, z) = \theta \cdot z$$

$\mathcal{V}$ - przestrzeń pomiarów($\dim \theta = \dim z = L$)

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ Sformułowanie problemu



Zakłócenia pomiarowe:

z_n – wartość zmiennej losowej $\underline{z}$ z przestrzeni $\mathcal{Z}$

$f_z(z)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $\underline{z}$

θ – obserwowany wektor wielkości, wartość zmiennej losowej $\underline{\theta}$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^R$

$f_\theta(\theta)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $\underline{\theta}$

Wyniki pomiarów: $V_N = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_N]$

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

Poszukujemy algorytmu estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(V_N)$$

✂ Możliwe rozwiązania:

- Metoda najmniejszych kwadratów
- Metoda maksymalnej wiarygodności
- Metody Bayes'a

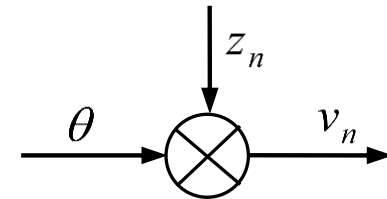
Metoda najmniejszych kwadratów

Założenia:

$v = h(\theta, z) = \theta + z$ - zakłócenia addytywne

$E[\underline{z}] = 0$ - wartość oczekiwana zakłóceń wynosi zero

$Var[\underline{z}] < \infty$ - skończona wariancja zakłóceń



Empiryczna wariancja zakłóceń:

$$Var_{zN}(V_N, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (v_n - \theta)^2$$

Algorytm estymacji otrzymujemy minimalizując empiryczną wariancję zakłóceń:

$$\theta_N = \Psi_N(V_N) \rightarrow Var_{zN}(V_N, \theta_N) = \min_{\theta \in \Theta} Var_{zN}(V_N, \theta)$$

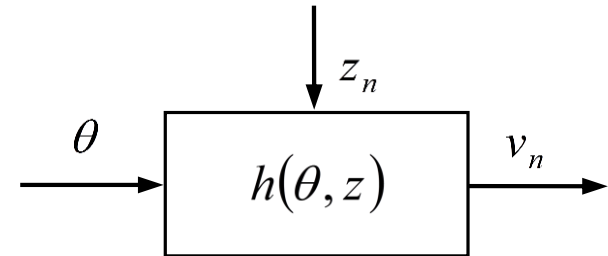
Algorytm estymacji:

$$\theta_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Założenia:

$\underline{v} = h(\theta, \underline{z})$ – system pomiarowy opisany jest dowolną funkcją h , wzajemnie jednoznaczną względem z



Postać funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zakłóceń $f_z(z)$ jest znana

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanej zmiennej losowej $\underline{v}$

$$f_v(v, \theta) = f_z(h_z^{-1}(\theta, v)) \cdot |J_h|, \quad \text{gdzie: } J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(\theta, v)}{\partial v}$$

gdzie: J_h - Jacobian, macierz przekształcenia odwrotnego.

Funkcja wiarygodności ma postać:

$$L_N(V_N, \theta) = \prod_{n=1}^N f_v(v_n, \theta) = \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h|,$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Algorytm estymacji otrzymujemy w wyniku maksymalizacji funkcji wiarygodności:

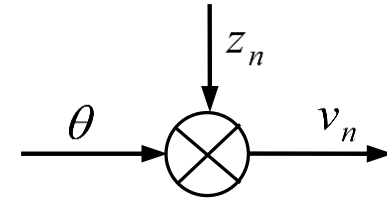
$$\theta_N = \Psi_N(V_N) \rightarrow L_N(V_N, \theta_N) = \max_{\theta \in \Theta} L_N(V_N, \theta)$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

☞ Przykład 1

Charakterystyka systemu pomiarowego:

$$v = h(\theta, z) = \theta + z$$



Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zakłóceń:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

Opis systemu pomiarowego:

$$v = h(a, z) = a + z$$

$$z = h_z^{-1}(\theta, v) = v - \theta$$

Macierz Jakobiego:

$$J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(\theta, v)}{\partial v} = \frac{d}{dv}(v - \theta) = 1$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

☞ Przykład 1

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa :

$$f_v(v, \theta) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(v - \theta - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right] \cdot |1|$$

Funkcja wiarygodności:

$$L_N(V_N, \theta) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(v_n - \theta - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

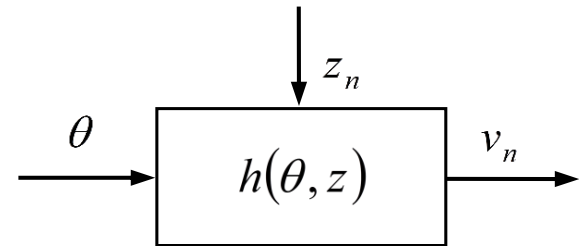
$$L_N(V_N, \theta) = \left(\frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left[\sum_{n=1}^N -\frac{(v_n - \theta - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

Algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(V_N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (v_n - m_z)$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Przykład



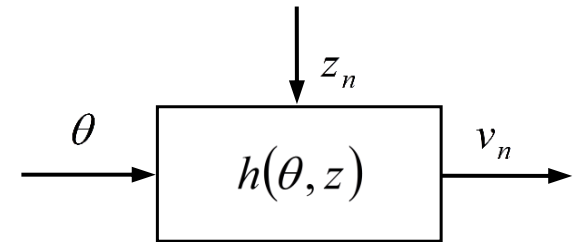
Opis zakłóceń:
$$f_z(z) = \begin{cases} 1 & \text{for } z \in [0, 1] \\ 0 & \text{for } z \notin [0, 1] \end{cases}$$

Opis systemu pomiarowego:
$$v = h(\theta, z) = \theta z \quad (\theta > 0)$$

$$z = h_z^{-1}(\theta, v) = \frac{v}{\theta}$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Przykład



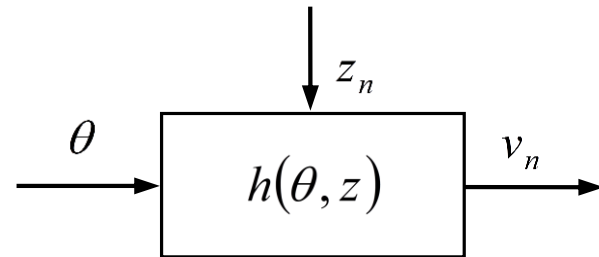
Macierz Jakobiego:
$$J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(\theta, v)}{\partial v} = \frac{d}{dv} \left(\frac{v}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta}$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanej zmiennej losowej:

$$f_v(v, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{for } \frac{v}{\theta} \in [0, 1] \\ 0 & \text{for } \frac{v}{\theta} \notin [0, 1] \end{cases}$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Przykład



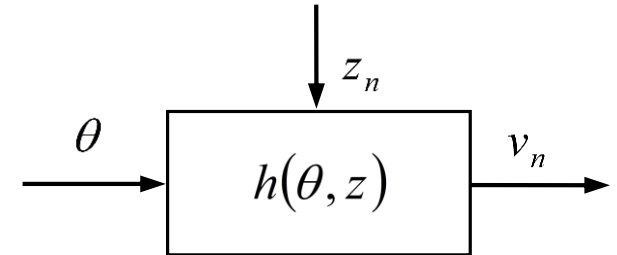
Funkcja wiarygodności:

$$L_N(V_N, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^N} & \text{for } \forall n = 1, 2, \dots, N \quad v_n \in [0, \theta] \\ 0 & \text{for } \exists n = 1, 2, \dots, N \quad v_n \notin [0, \theta] \end{cases}$$

$$L_N(V_N, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^N} & \text{for } \theta \geq \max_{1 \leq n \leq N} \{v_n\} \\ 0 & \text{for } \theta < \max_{1 \leq n \leq N} \{v_n\} \end{cases}$$

Metoda maksymalnej wiarogodności

Przykład



Algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(V_N) = \max_{1 \leq n \leq N} \{v_n\}$$

Interpretacja:

$$\theta_N = \max_{1 \leq n \leq N} \{v_n\} = \max_{1 \leq n \leq N} \{\theta z_n\} = \theta \max_{1 \leq n \leq N} \{z_n\}$$

Metody Bayes'a bez obserwacji

- ⌘ $\underline{\theta}$ - zmienna losowa
 - ⌘ θ - wartość zmiennej losowej
 - ⌘ $\underline{\theta}$ - zmienna losowa ciągła
 - ⌘ $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^R$
 - ⌘ $f_{\theta}(\theta)$ - gęstość rozkładu prawdopodobieństwa
-
- ⌘ $\underline{\theta}$ - zmienna losowa dyskretna
 - ⌘ $\theta \in \Theta \subseteq \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m, \dots, \theta_M\}$
 - ⌘ $P(\underline{\theta} = \theta_m) = p_m, m = 1, 2, \dots, M$

☞ $\bar{\theta}$ - możliwa decyzja

☞ $L(\theta, \bar{\theta})$ - funkcja strat – ocena decyzji

☞ Przykładowe funkcje strat – minimum gdy decyzja jest trafna

☞ $L(\theta, \bar{\theta}) = (\theta - \bar{\theta})^2$

☞ $L(\theta, \bar{\theta}) = |\theta - \bar{\theta}|$

☞ $L(\theta, \bar{\theta}) = -\delta(\theta - \bar{\theta})$ - delta Dirac'a

☞ Wylosowana wartość θ nie jest znana

- ✧ Ryzyko podjęcia decyzji – wartość oczekiwana funkcji strat
- ✧ Dla zmiennych losowych ciągłych
- ✧ $R(\bar{\theta}) = \int_{\Theta} L(\theta, \bar{\theta}) f_{\theta}(\theta) d\theta$
- ✧ Dla zmiennych losowych dyskretnych
- ✧ $R(\bar{\theta}) = \sum_{m=1}^M L(\theta_m, \bar{\theta}) p_m$
- ✧ Decyzja optymalna – θ^*
- ✧ $R(\theta^*) = \min_{\bar{\theta} \in \Theta} R(\bar{\theta})$

☞ Dla różnych funkcji strat możemy otrzymać różne decyzje

☞ Np.:

$$\text{☞ } L(\theta, \bar{\theta}) = (\theta - \bar{\theta})^2$$

$$\text{☞ } R(\bar{\theta}) = \int_{\Theta} (\theta - \bar{\theta})^2 f_{\theta}(\theta) d\theta$$

$$\text{☞ } \frac{dR(\bar{\theta})}{d\bar{\theta}} = -2 \int_{\Theta} (\theta - \bar{\theta}) f_{\theta}(\theta) d\theta|_{\bar{\theta}=\theta^*} = 0$$

$$\text{☞ } \theta^* \int_{\Theta} f_{\theta}(\theta) d\theta = \int_{\Theta} \theta f_{\theta}(\theta) d\theta$$

$$\text{☞ } \theta^* = \int_{\Theta} \theta f_{\theta}(\theta) d\theta - \text{wartość oczekiwana zmiennej } \underline{\theta}$$

☞ Dla funkcji strat:

☞ $L(\theta, \bar{\theta}) = -\delta(\theta - \bar{\theta})$

☞ Ryzyko

☞ $R(\bar{\theta}) = -\int_{\Theta} \delta(\theta - \bar{\theta}) f_{\theta}(\theta) d\theta = -f_{\theta}(\bar{\theta})$

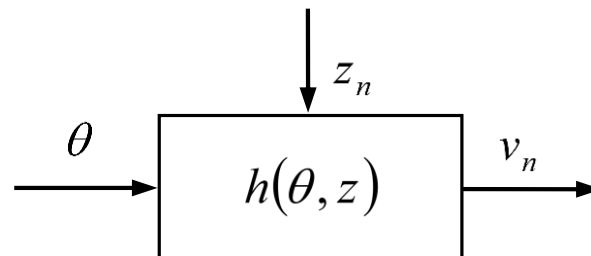
☞ $R(\theta^*) = \min_{\bar{\theta} \in \Theta} R(\bar{\theta}) = \min_{\bar{\theta} \in \Theta} (-f_{\theta}(\bar{\theta})) = -\max_{\bar{\theta} \in \Theta} (f_{\theta}(\bar{\theta}))$

☞ Optymalna decyzja maksymalizuje gęstość rozkładu prawdopodobieństwa

☞ Uwaga: dla funkcji strat: $L(\theta, \bar{\theta}) = |\theta - \bar{\theta}|$

☞ Optymalna decyzja - θ^* - mediana

Metody Bayes'a z obserwacją



Założenia:

$\underline{v} = h(\underline{\theta}, \underline{z})$ - system pomiarowy opisany jest dowolną funkcją, wzajemnie jednoznaczłą względem $\underline{z}$

$\underline{\theta}$ - obserwowany wektor wielkości, wartość zmiennej losowej $\underline{\theta}$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^R$

Postacie funkcji gęstości rozkładów prawdopodobieństwa $f_z(z)$ oraz $f_\theta(\theta)$ są znane .

Dana jest funkcja strat $L(\underline{\theta}, \bar{\theta})$, gdzie $\bar{\theta}$ jest wartością estymaty obserwowanej wielkości.

Ryzyko:
$$R(\bar{\Psi}) \stackrel{df}{=} E_{\underline{\theta}, \underline{V}_N} [L(\underline{\theta}, \bar{\theta} = \bar{\Psi}(\underline{V}_N))] = \int \int_{\mathcal{V}_N \Theta} L(\underline{\theta}, \bar{\Psi}(\underline{V}_N)) f(\underline{\theta}, \underline{V}_N) d\underline{\theta} d\underline{V}_N$$

gdzie: $f(\underline{\theta}, \underline{V}_N)$ łączny rozkład prawdopodobieństwa

$$f(\underline{\theta}, \underline{V}_N) = f'(\underline{\theta} | \underline{V}_N) f''(\underline{V}_N)$$

gdzie f' jest warunkową, a f'' brzegową funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa

Metody Bayes'a

Problem: $\Psi_N \rightarrow R(\Psi_N) = \min_{\bar{\Psi}} R(\bar{\Psi})$

$$R(\bar{\Psi}) = \int \int_{\mathcal{V}_N \Theta} L(\theta, \bar{\Psi}(V_N)) f'(\theta|V_N) d\theta f''(V_N) dV_N$$

$$r(\bar{\theta}, V_N) \stackrel{\text{df}}{=} E_{\underline{\theta}}[L(\underline{\theta}, \bar{\theta})|V_N] = \int_{\Theta} L(\theta, \bar{\theta} = \bar{\Psi}(V_N)) f'(\theta|V_N) d\theta$$

gdzie: r - ryzyko warunkowe

Problem sprowadza się do następującego zadania :

$$\theta_N = \Psi_N(V_N) \rightarrow r(\theta_N, V_N) = \min_{\bar{\theta} \in \Theta} r(\bar{\theta}, V_N)$$

Szczególny przypadek

$$\propto L(\theta, \bar{\theta}) = (\theta - \bar{\theta})^2$$

$$\propto r(\bar{\theta}, V_N) = \int_{\Omega} (\theta - \bar{\theta})^2 f'(\theta/V_N) d\theta$$

$$\propto \left. \frac{dr(\bar{\theta}, V_N)}{d\bar{\theta}} \right|_{\bar{\theta} = \theta^*} = -2 \int_{\Omega} (\theta - \theta^*) f'(\theta/V_N) d\theta = 0 \quad / -2$$

$$\propto \int_{\Omega} \theta^* f'(\theta/V_N) d\theta = \int_{\Omega} \theta f'(\theta/V_N) d\theta$$

$$\propto \theta^* \int_{\Omega} f'(\theta/V_N) d\theta = \int_{\Omega} \theta f'(\theta/V_N) d\theta$$

$\propto$ Stąd

$$\propto \theta^* = \int_{\Omega} \theta f'(\theta/V_N) d\theta - \text{wartość oczekiwana a' posteriori}$$

$\propto$ Metoda średniej a' posteriori

Szczególny przypadek

$$\hookrightarrow L(\theta, \bar{\theta}) = -\delta(\theta - \bar{\theta})$$

$$\hookrightarrow r(\bar{\theta}, V_N) = \int_{\Omega} -\delta(\theta - \bar{\theta}) f'(\theta/V_N) d\theta$$

$$\hookrightarrow r(\bar{\theta}, V_N) = -f'(\bar{\theta}/V_N)$$

$$\hookrightarrow \min_{\bar{\theta}} r(\bar{\theta}, V_N) = \min_{\bar{\theta}} (-f'(\bar{\theta}/V_N)) = -\max_{\bar{\theta}} f'(\bar{\theta}/V_N)$$

$$\hookrightarrow \theta^* \rightarrow f'(\theta^*/V_N) = \max_{\bar{\theta}} f'(\bar{\theta}/V_N)$$

$\hookrightarrow$ Metoda maksymalnego prawdopodobieństwa a' posteriori

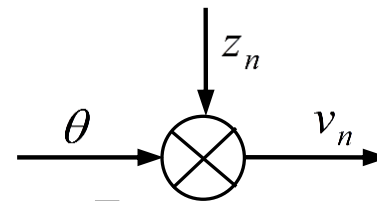
Metody Bayes'a

Gdzie funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa a posteriori:

$$\begin{aligned}
 f'(\theta|V_N) &= \frac{f_\theta(\theta) f_{VN}(V_N|\theta)}{\int_{\Theta} f_\theta(\theta) f_{VN}(V_N|\theta) d\theta} = \frac{f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_v(v_n|\theta)}{\int_{\Theta} f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_v(v_n|\theta) d\theta} = \\
 &= \frac{f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h|}{\int_{\Theta} f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h| d\theta} = \frac{f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h|}{const} \\
 \int_{\Theta} f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h| d\theta &= const \quad \text{dla danej serii pomiarowej } V_N \\
 f'(\theta|V_N) &\propto f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h|
 \end{aligned}$$

Metody Bayes'a

Przykład



Opis zakłóceń:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right]$$

Rozkład prawdopodobieństwa:

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\theta - m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}\right]$$

Opis systemu pomiarowego:

$$v = h(\theta, z) = \theta + z, \quad z = h_z^{-1}(\theta, v) = v - \theta$$

Funkcja strat:

$$L(\theta, \bar{\theta}) = -\delta(\theta - \bar{\theta})$$

Metody Bayes'a

Przykład

Macierz Jakobiego:

$$J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(\theta, v)}{\partial v} = \frac{d}{dv} (v - \theta) = 1$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanej zmiennej:

$$f_v(v|\theta) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(v - \theta)^2}{2\sigma_z^2}\right] \cdot |1|$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa a posteriori

$$\begin{aligned} f'(\theta|V_N) &\propto f_\theta(\bar{\theta}) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h| = \\ &= \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\bar{\theta} - m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}\right] \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(v_n - \bar{\theta})^2}{2\sigma_z^2}\right] \end{aligned}$$

Metody Bayes'a

∞ Przykład

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa a posteriori po przekształceniach:

$$f'(\theta|V_N) \propto f_\theta(\bar{\theta}) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\bar{\theta}, v_n)) |J_h| =$$

$$= \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left[-\frac{(\bar{\theta} - m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2} - \sum_{n=1}^N \frac{(v_n - \bar{\theta})^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

Dla funkcji strat: $L(\theta, \bar{\theta}) = -\delta(\theta - \bar{\theta})$ ryzyko warunkowe:

$$r(\bar{\theta}, V_N) \stackrel{\text{df}}{=} E_{\underline{\theta}}[L(\underline{\theta}, \bar{\theta})|V_N] = \int_{\Theta} L(\theta, \bar{\theta} = \bar{\Psi}(V_N)) f'(\theta|V_N) d\theta = -f'(\theta|V_N) \propto$$

$$\propto -f_\theta(\bar{\theta}) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\bar{\theta}, v_n)) |J_h| = -\frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left[-\frac{(\bar{\theta} - m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2} - \sum_{n=1}^N \frac{(v_n - \bar{\theta})^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

Metody Bayes'a

Przykład

W wyniku minimalizacji ryzyka warunkowego otrzymujemy algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(V_N) = \frac{m_\theta + \left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}\right)^2 \sum_{n=1}^N v_n}{1 + \left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}\right)^2 N}$$

Dyskusja:

1° N - mała liczba pomiarów
($\sigma_z \gg \sigma_\theta$) - pomiary bezwartościowe

2° $N \rightarrow \infty$
($\sigma_z \ll \sigma_\theta$) - dobre pomiary

$$\theta_N \approx m_\theta$$

$$\theta_N \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n$$

Dziękuję za uwagę

