

Metody Systemowe i Decyzyjne

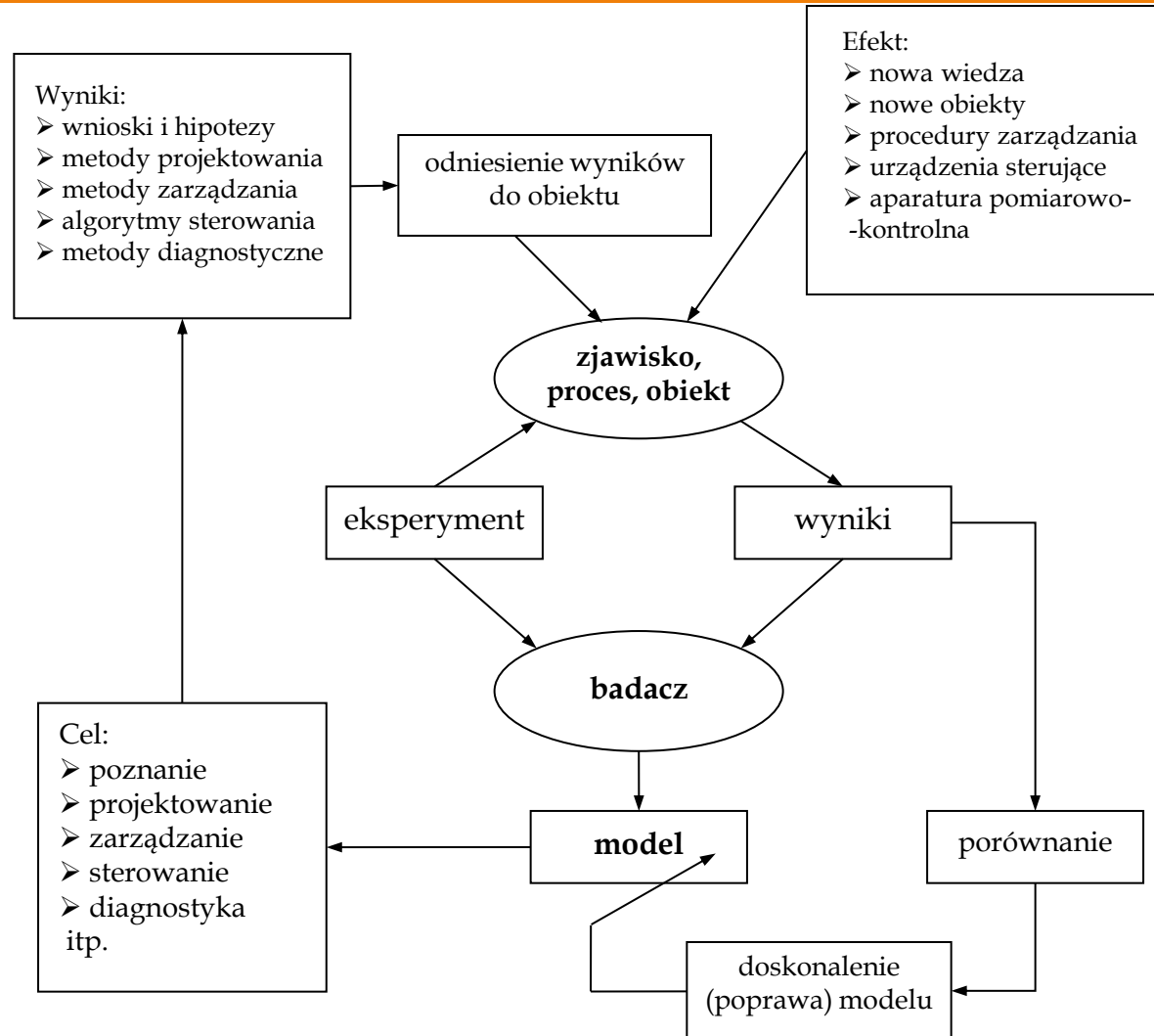


Wykład 14. Podsumowanie

Analiza systemowa

- ∞ Analiza systemowa – zbiór metod i technik wspomagających analizę, projektowanie, zarządzanie i sterowanie w złożonych sytuacjach
 - Systematyczny sposób analizy złożonych problemów w celu **osiągnięcia określonego celu**
 - Opracowanie propozycji różnych rozwiązań z uwzględnieniem **złożonego celu** oraz wielu kryteriów oceny rozwiązania
 - Wspomaganie decydenta w wyborze optymalnego rozwiązania spośród wielu możliwości

Model w badaniach systemowych

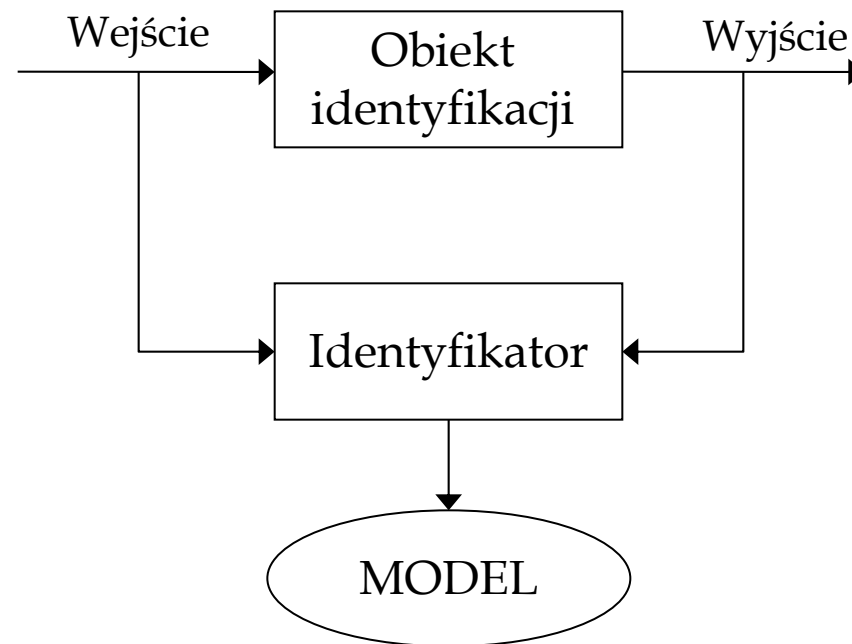


Model w badaniach systemowych

- ∞ Model jest uproszczoną reprezentacją systemu, w czasie i przestrzeni, stworzoną w zamiarze zrozumienia zachowania systemu rzeczywistego
- ∞ Modele konceptualne
- ∞ Modele fizyczne
- ∞ Modele analogowe
- ∞ Modele matematyczne
- ∞ Modele komputerowe

Zadanie identyfikacji

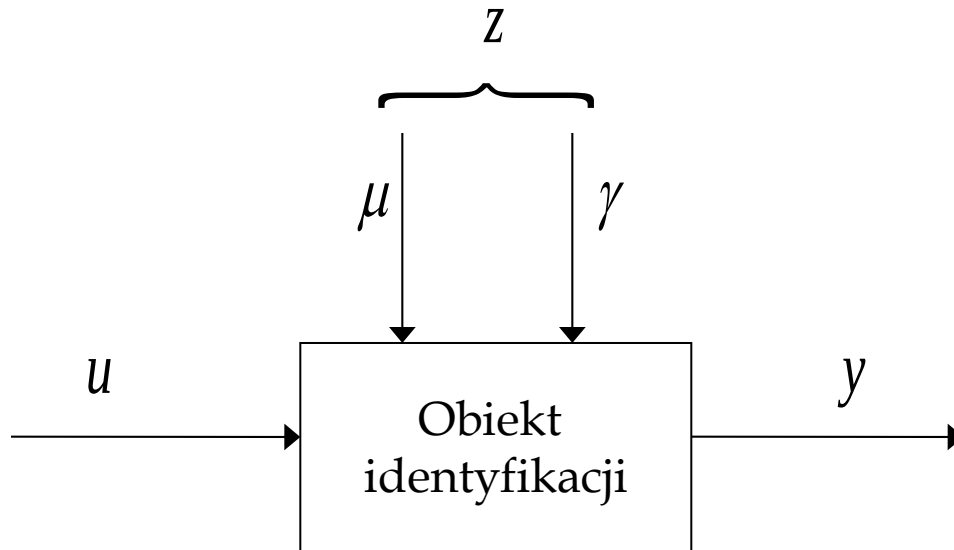
Zadanie identyfikacji – proces tworzenia modelu matematycznego obiektu na podstawie obiektu



Zadanie identyfikacji

1. Określenie obiektu identyfikacji
2. Określenie klasy modeli
3. Organizacja eksperymentu
4. Wyznaczenie algorytmu identyfikacji
5. Wykonanie identyfikatora

Ad.1. Określenie obiektu identyfikacji



u – wejście

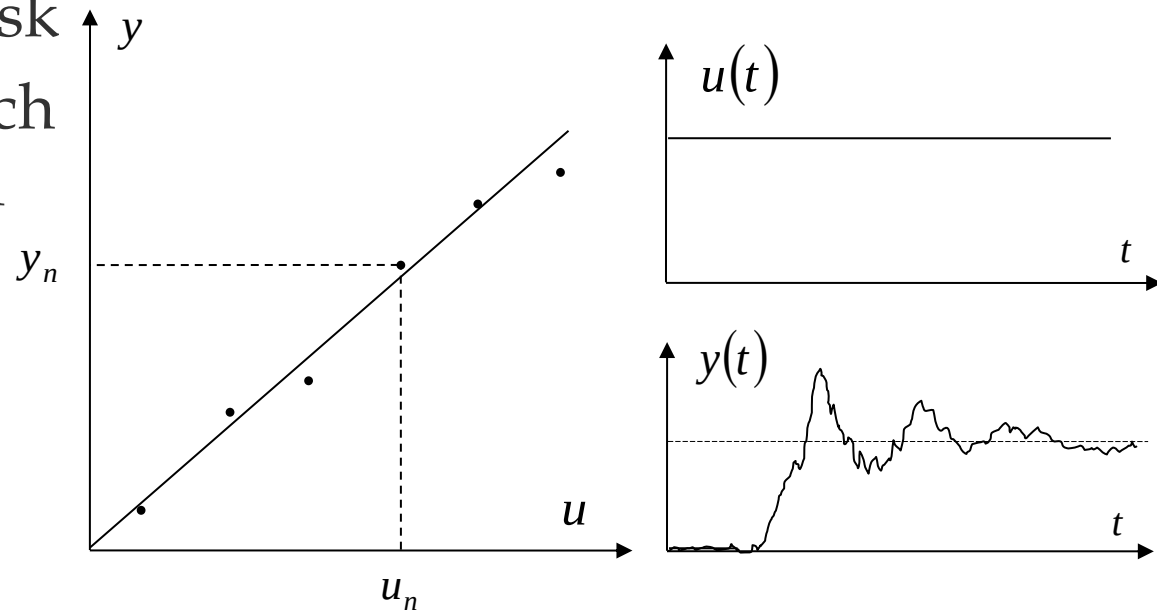
y – wyjście

μ – zakłócenia mierzalne

γ – zakłócenia niemierzalne

Ad.2. Określenie klasy modeli

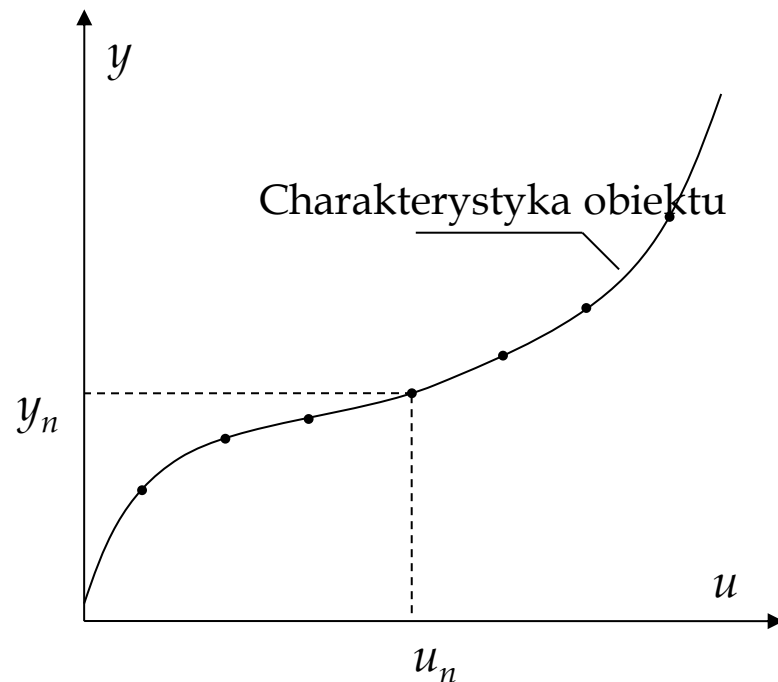
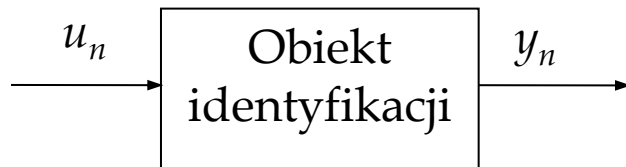
- ⌘ Analiza zjawisk
- ⌘ Analiza danych pomiarowych



- ⌘ Model arbitralny
- ⌘ Model oparty na wiedzy eksperta

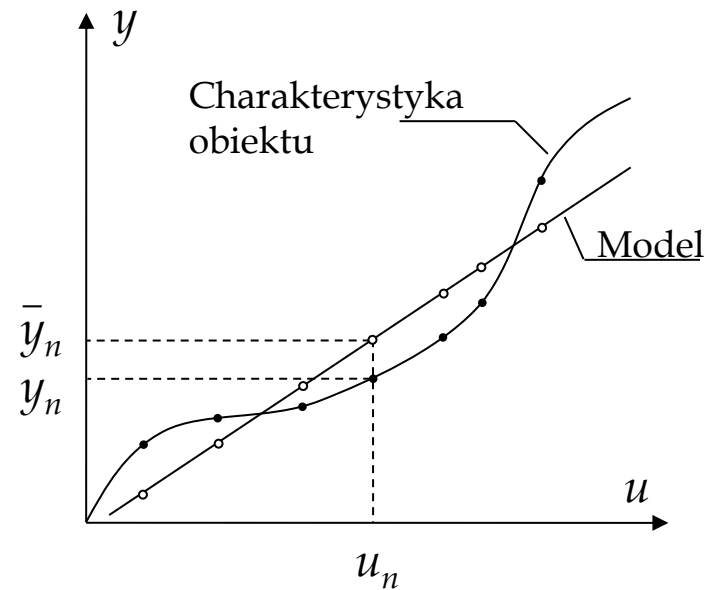
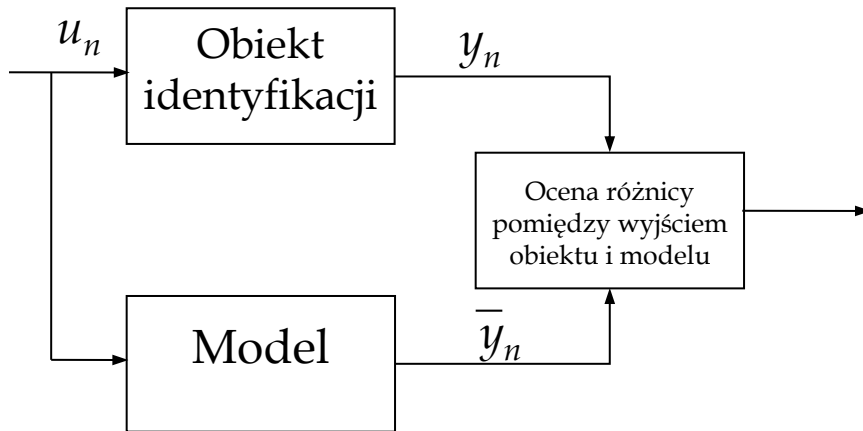
Ad.2. Określenie klasy modeli

∞ Obiekt w klasie modeli



Ad.2. Określenie klasy modeli

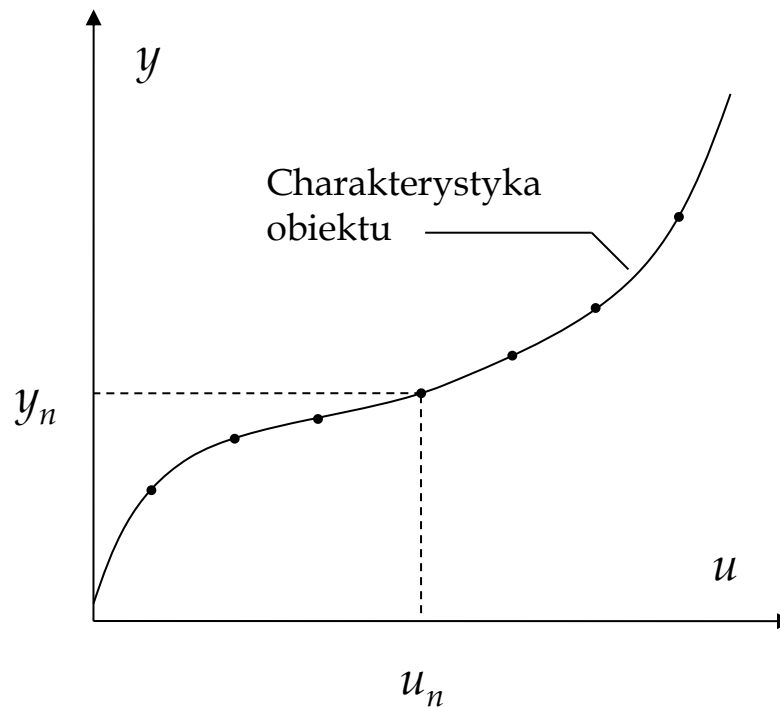
☞ Wybór optymalnego modelu



Ad.3. Organizacja eksperymentu

Obiekt statyczny

$$U_N = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N], \quad Y_N = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_N]$$



Ad.3. Organizacja eksperymentu

Obiekt dynamiczny

$$U_T = \{u(t)\}_{t=t_0}^T, \quad Y_T = \{y(t)\}_{t=t_0}^T,$$

Obszerwacje dyskretne

$$t_1, t_2, \dots, t_N, t_n \in [t_0 \ T], n = 1, 2, \dots, N$$

$$U_N = \{u(t_n)\}_{n=1}^N, \quad Y_N = \{y(t_n)\}_{n=1}^N.$$

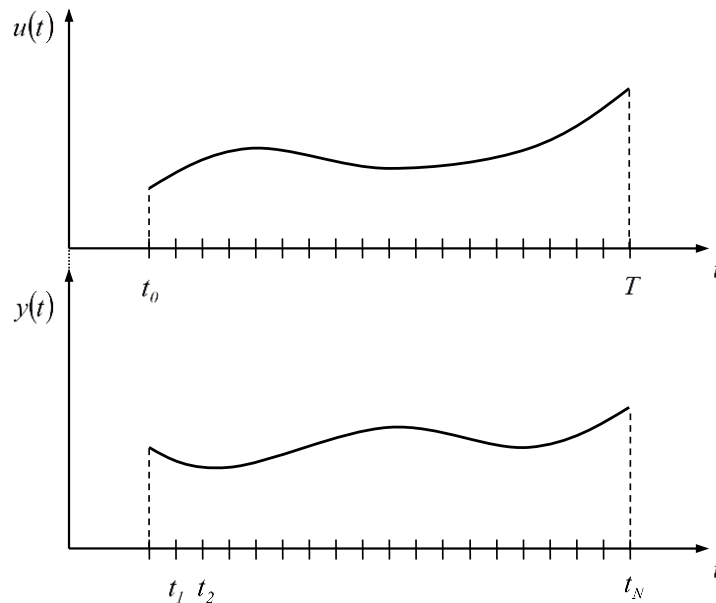
Dynaamiczny obiekt dyskretny

$$U_N = \{u_n\}_{n=1}^N, \quad Y_N = \{y_n\}_{n=1}^N.$$

Ad.3. Organizacja eksperymentu

Ciągły obiekt dynamiczny

Dla sygnału wejściowego $\{u(t)\}_{t_0}^T$ rejestrujemy odpowiedni sygnał wyjściowy $\{y(t)\}_{t_0}^T$ lub w wybranych chwilach $t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq T$ obserwujemy odpowiednio ciąg wejść $\{u(t_n)\}_{n=0}^N$ i wyjść $\{y(t_n)\}_{n=0}^N$



Ad.3. Organizacja eksperymentu

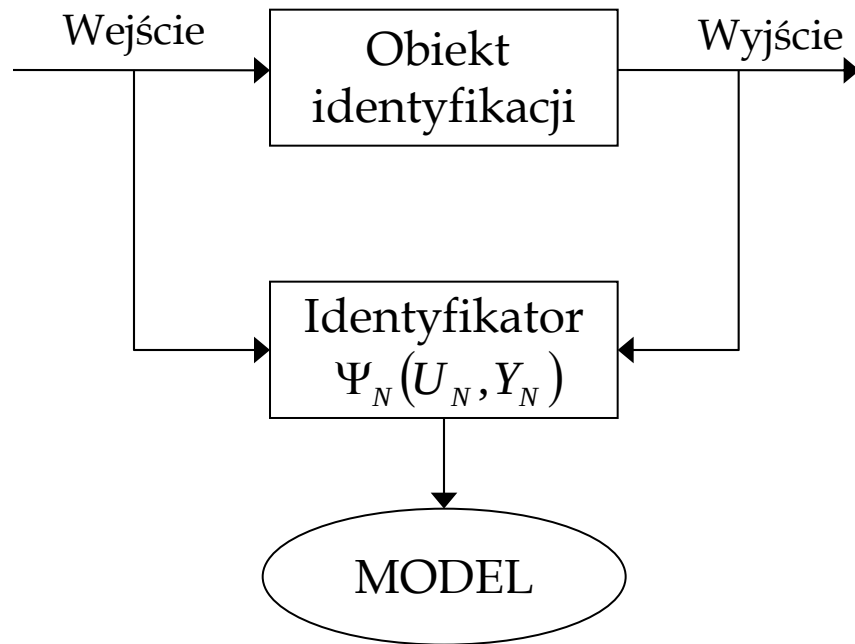
∞ Eksperyment pasywny

- Sygnały wejściowe : $U_N, \{u(t)\}_{t_0}^T, \{u(t_n)\}_{n=0}^N, \{u_n\}_{n=0}^N$ są tylko obserwowane

∞ Eksperyment aktywny

- Sygnały wejściowe : $U_N, \{u(t)\}_{t_0}^T, \{u(t_n)\}_{n=0}^N, \{u_n\}_{n=0}^N$ mogą być zaprojektowane (zaplanowane)

Ad.4. Wyznaczenie algorytmu identyfikacji



U_N – Seria pomiarowa wejść

Y_N – Wyniki pomiarów wyjść

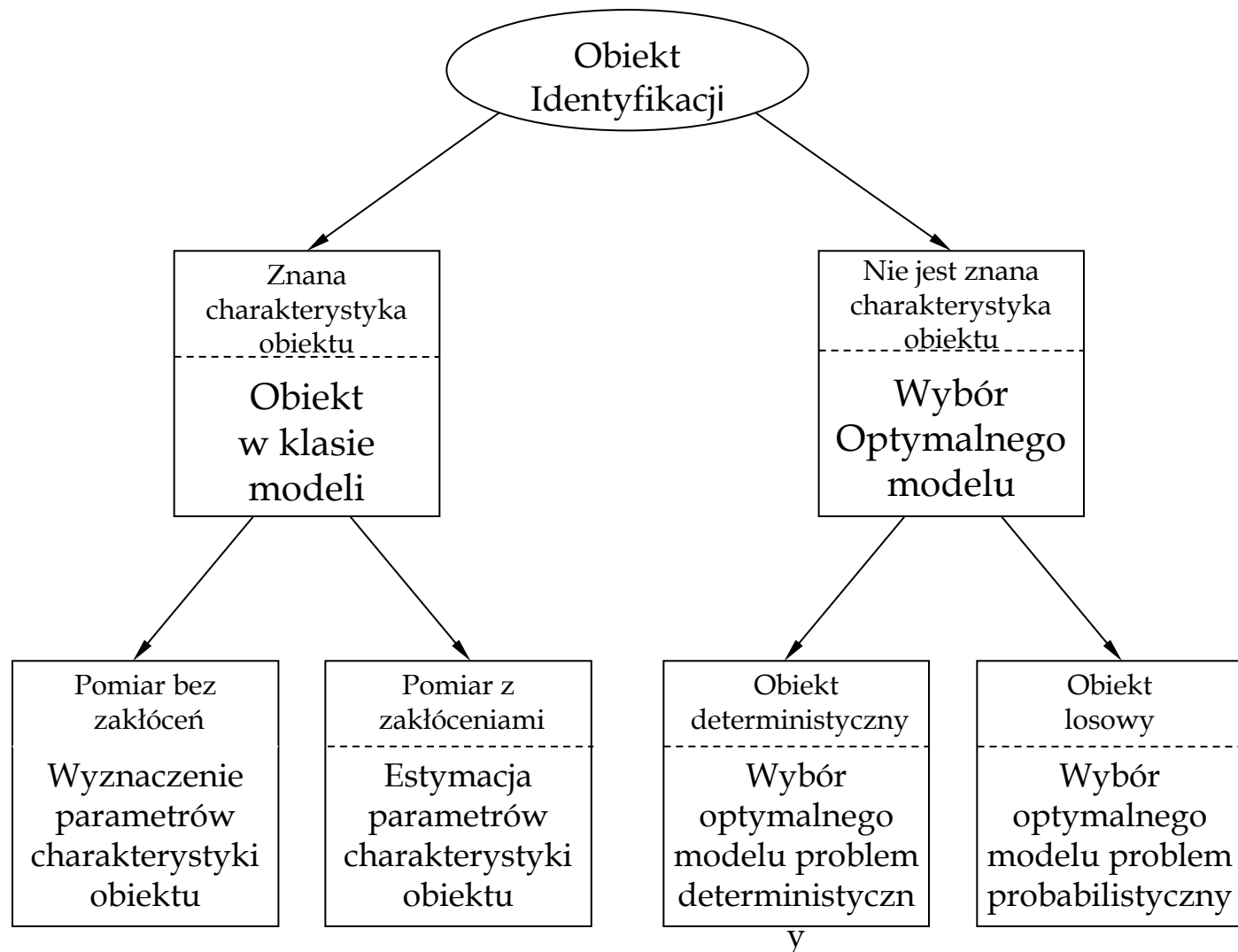
Ψ_N – Algorytm identyfikacji

Ad. 5. Wykonanie identyfikatora

∞ Algorytm identyfikacji

- Program komputerowy
- Realizacja sprzętowa

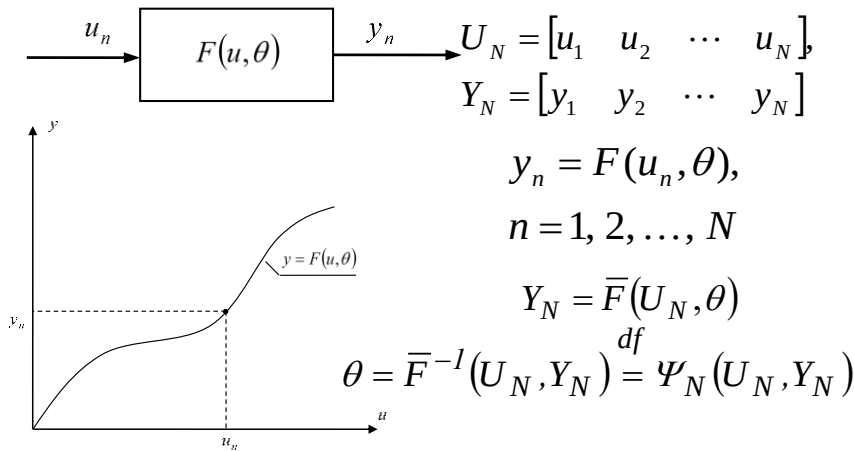
Typowe zadania identyfikacji



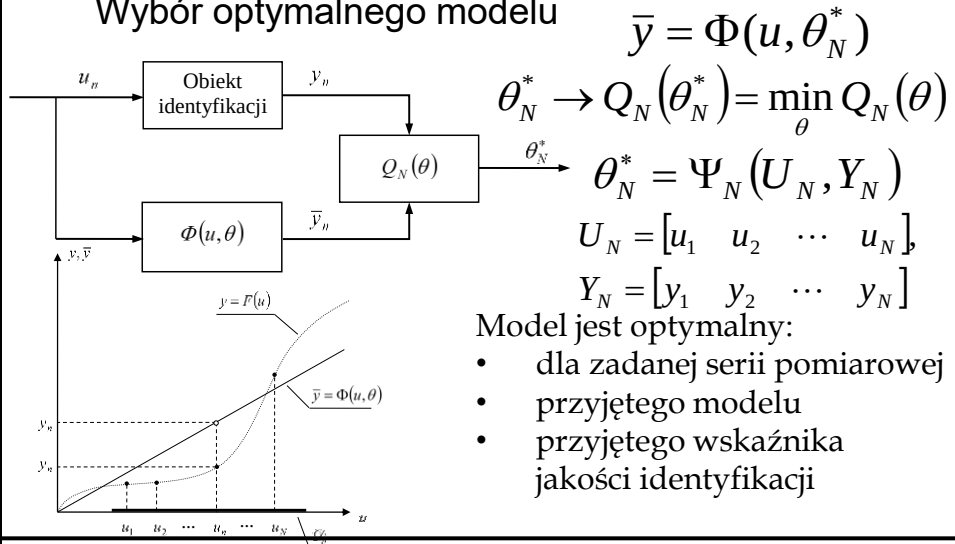
Podstawowe zadania identyfikacji podsumowanie

Obiekt w klasie modeli

D
e
t
e
r
m
i
n
i
s
t
y
c
z
n
y



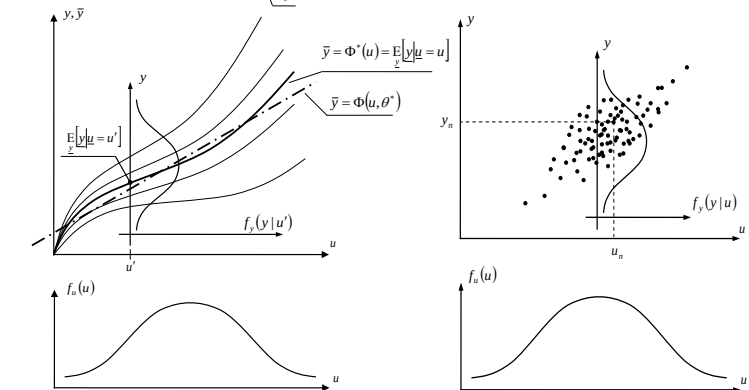
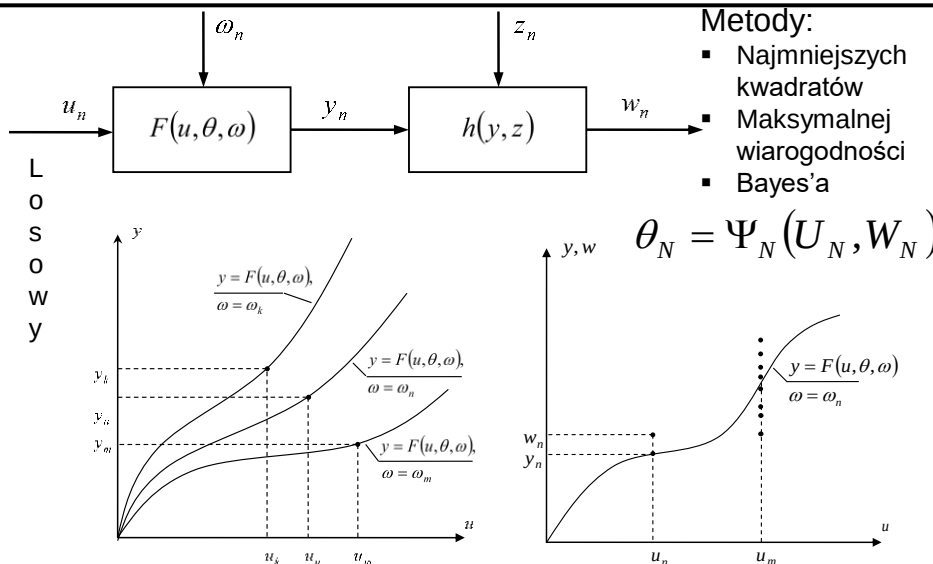
Wybór optymalnego modelu



Metody:

- Najmniejszych kwadratów
- Maksymalnej wiarygodności
- Bayes'a

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N)$$



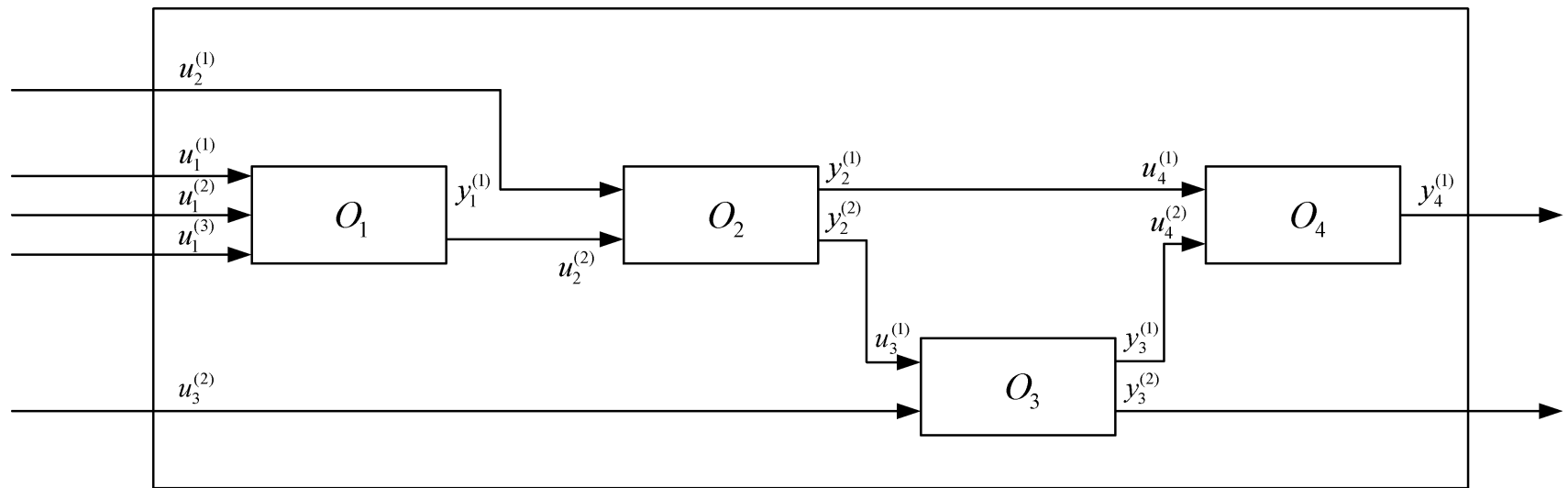
Pełna informacja

- Regresja I rodzaju
- Regresja II rodzaju

Niepełna informacja

- Estymacja wskaźnika jakości
- Estymacja parametrów rozkładu
- Estymacja rozkładu

Elementy (komponenty) systemu - działające części

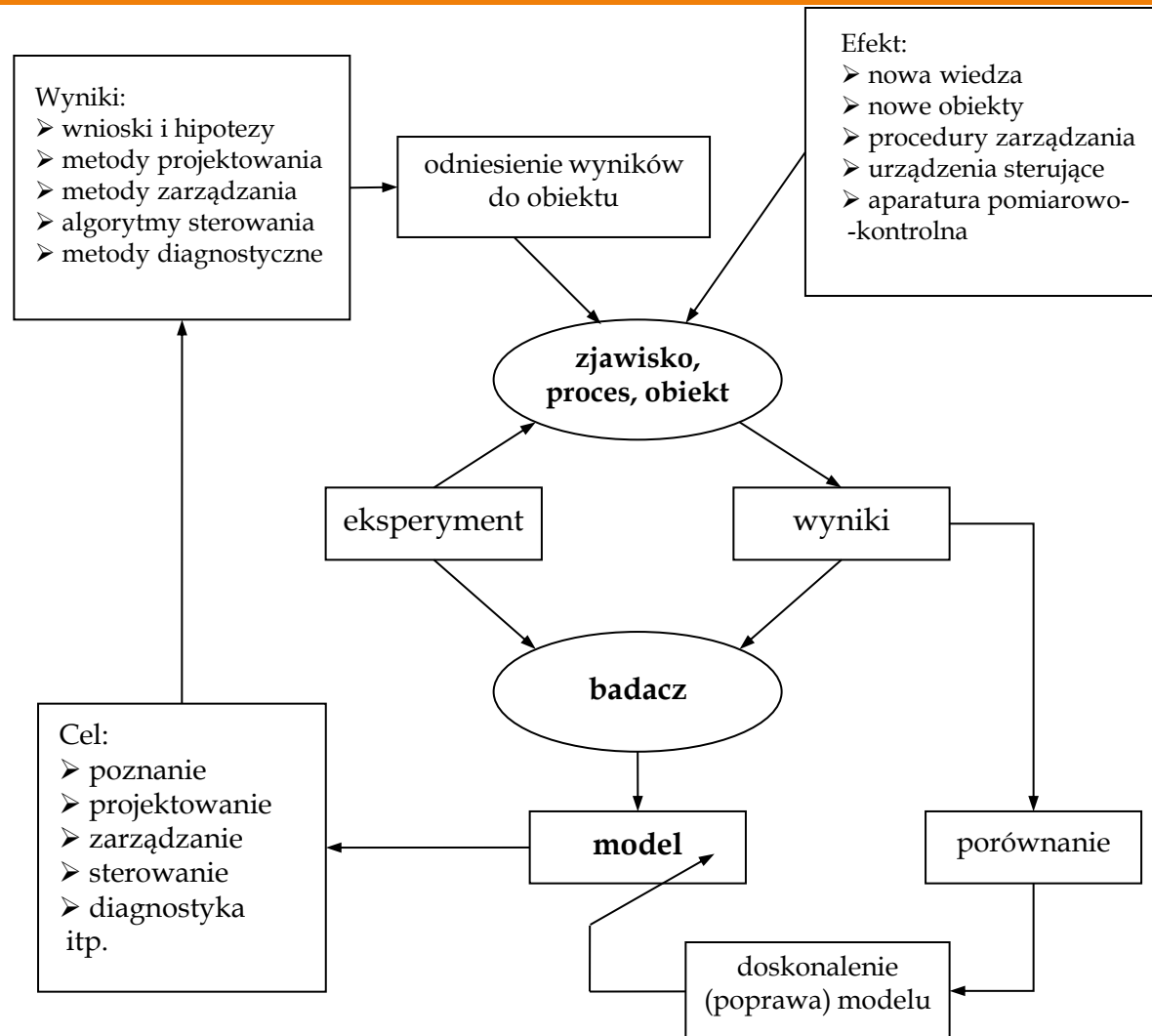


Przykład systemu złożonego – produkcja aspiryny

Nowe problemy

- Opis systemu złożonego
- Identyfikacja przy ograniczonych możliwościach pomiarowych
- Identyfikacja lokalna i identyfikacja globalna
- Identyfikacja wielostopniowa

Model w badaniach systemowych



Sformułowanie zadania wspomagania decyzji

Decyzja: różne typy elektrowni



Elektrownia wodna

$x^{(1)}$



Elektrownia atomowa

$x^{(2)}$



Elektrownia wiatrowa

$x^{(3)}$

Obrazy:

<http://ziemianarozdrozu.pl/encyklopedia/67/hydroenergetyka/>

http://kresy24.pl/showNews/news_id/5871/

<http://windy-future.info/2009/10/13/large-wind-turbine/>

$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ - obciążenie elektrowni –
zmienne decyzyjne

c_1, c_2, c_3 – koszt jednostkowy
wytworzenia energii

Cel: minimalizacja kosztów wytworzenia: $F(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + c_3 x^{(3)}$

Ograniczenia: – spełnienie zapotrzebowania na energię: $x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} \geq \beta$
– możliwości poszczególnych elektrowni: $0 \leq x^{(n)} \leq \alpha_n, n = 1, 2, 3$

Sformułowanie zadania wspomagania decyzji

Zmienne decyzyjne: $x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(s)} \end{bmatrix}$

Funkcja celu: $y = F(x)$

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (zwykle określony przez wskazanie ograniczeń):

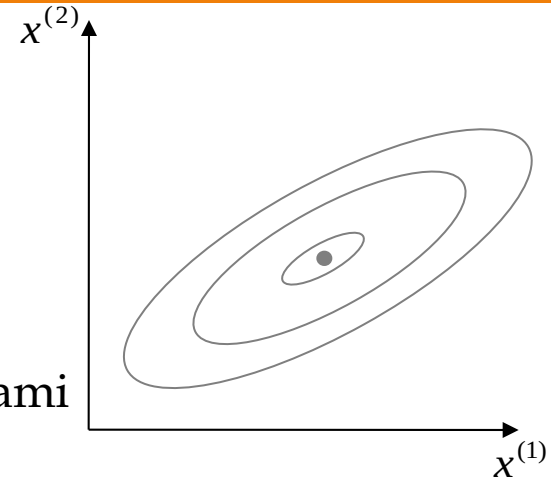
$$x \in \mathcal{D}_x$$

Decyzja optymalna: $x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x), \quad \min F(x) = -\max(-F(x))$

Decyzja zadowalająca: $\tilde{x} \rightarrow F(\tilde{x}) \leq F(x^*) + \alpha = \gamma \wedge x \in \mathcal{D}_x$

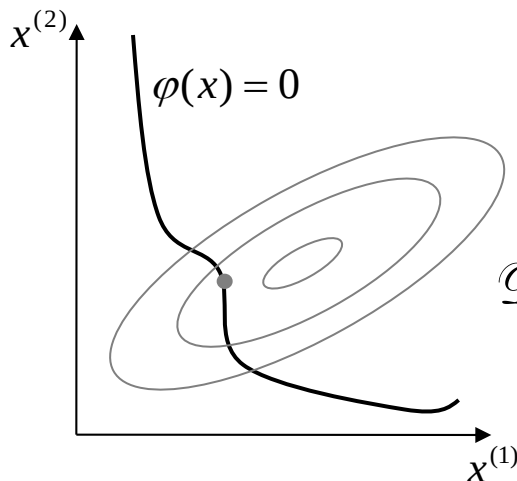
Typowe zadania decyzyjne

Zadanie decyzyjne bez ograniczeń: $\mathcal{D}_x = \mathcal{R}^S$



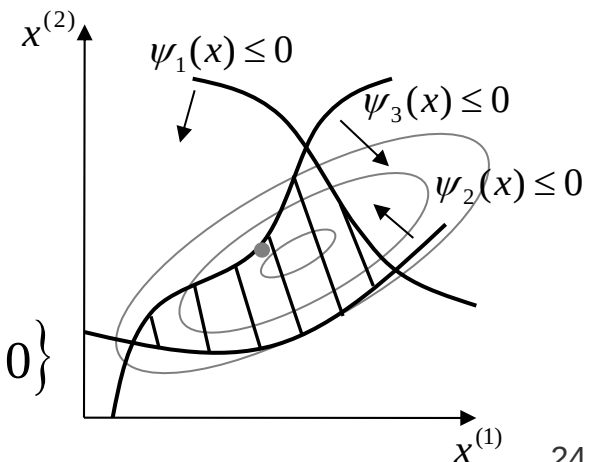
Zadanie decyzyjne z ograniczeniami równościowymi:

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S : \varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0, \dots, \varphi_L(x) = 0, L \leq S\}$$



Zadanie decyzyjne z ograniczeniami nierównościami:

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S : \psi_1(x) \leq 0, \psi_2(x) \leq 0, \dots, \psi_M(x) \leq 0\}$$



Analityczne metody optymalizacji

- ⌘ Zadanie optymalizacji bez ograniczeń
- ⌘ Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi – metoda współczynników Lagrange’a
- ⌘ Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościowymi – metoda Kuhna-Tuckera

Zadanie optymalizacji bez ograniczeń

Zadanie optymalizacji: $x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x = \mathcal{R}^S} F(x)$

Założenie: $F(x)$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną.

Warunkiem koniecznym aby x^* było minimum lokalnym jest:

$$\nabla_x F(x) \Big|_{x^*} = 0_S$$

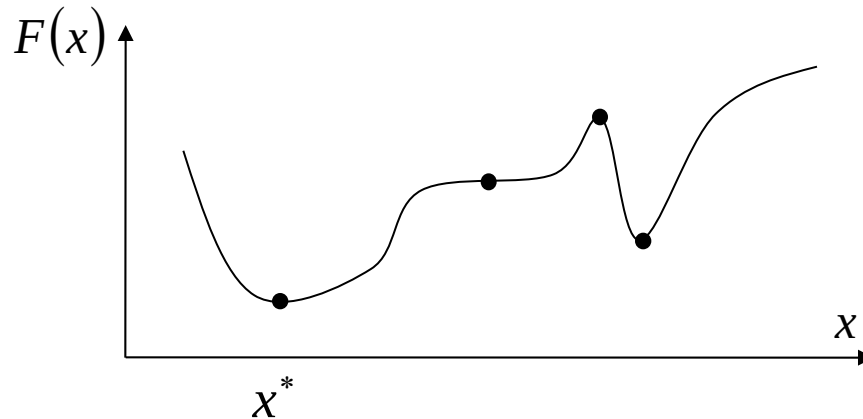
Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pseudo - wypukłą, powyższe równanie jest warunkiem koniecznym i wystarczającym aby x^* było minimum globalnym

Jeżeli $H(x)$ jest dodatnio pół określona $\forall x \in \mathcal{R}^S$ to rozwiązanie powyższego równania jest minimum globalnym

Jeżeli $H(x)$ jest dodatnio określona $\forall x \in \mathcal{R}^S$ powyższe równanie ma jedno rozwiązanie x^* i jest ono minimum globalnym

Zadanie optymalizacji bez ograniczeń

Równanie $\nabla_x F(x)|_{x^*} = 0_S$ może mieć wiele rozwiązań



Warunki optymalności drugiego rzędu:

Jeżeli $H(x^*)$ jest dodatnio pół określona w punkcie x^*
to x^* jest minimum lokalnym

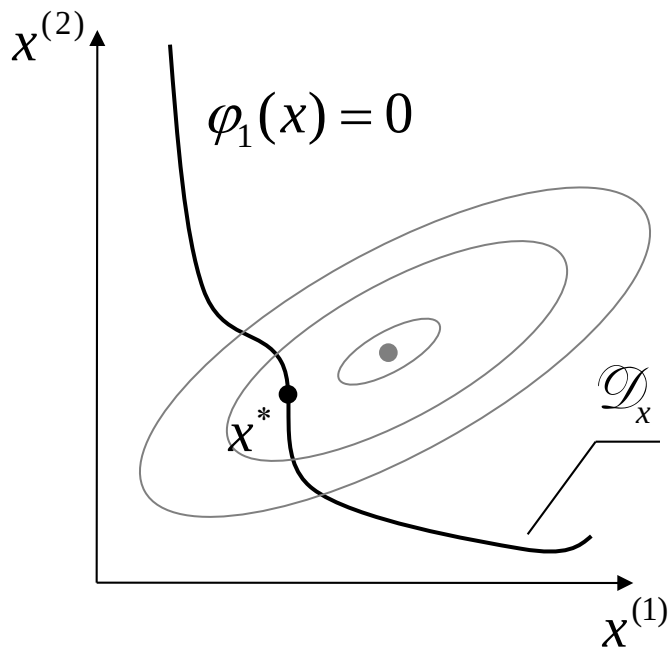
Jeżeli $H(x^*)$ jest ujemnie pół określona w punkcie x^*
to x^* jest maksimum lokalnym

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

Metoda mnożników Lagrange' a

Zadanie optymalizacji: $x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x^* \in \mathcal{D}_x} F(x)$

$$\mathcal{D}_x = \left\{ x \in \mathcal{R}^S : \varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0, \dots, \varphi_L(x) = 0, L \leq S \right\}$$



$$\mathcal{D}_x = \left\{ x \in \mathcal{R}^S : \varphi(x) = 0_L, L \leq S \right\}$$

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_L(x) \end{bmatrix} \quad 0_L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \right\} L - \text{zer}$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

Metoda mnożników Lagrange' a

Metoda współczynników Lagrange' a

Funkcja Lagrange' a:

$$L(x, \lambda) = F(x) + \sum_{l=1}^L \lambda_l \varphi_l(x) = F(x) + \lambda^T \varphi(x)$$

gdzie: $\varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_L(x) \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_L \end{bmatrix}$ - wektor współczynników Lagrange' a

Warunki konieczne optymalności:

$$\nabla_x L(x, \lambda) \Big|_{x^*, \lambda^*} = 0_S$$

$$\nabla_\lambda L(x, \lambda) \Big|_{x^*, \lambda^*} = 0_L \Leftrightarrow \text{rank } G(x) = \text{rank} \begin{bmatrix} G(x) & \vdots & -\nabla_x F(x) \end{bmatrix},$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} \nabla_x \varphi_1(x) & \vdots & \nabla_x \varphi_2(x) & \vdots & \cdots & \vdots & \nabla_x \varphi_L(x) \end{bmatrix}$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

Metoda mnożników Lagrange' a

Powyższy układ równań może mieć wiele rozwiązań

Warunki optymalności drugiego rzędu:

Oznaczmy: $H_L(x) = \nabla_{xx} L(x, \lambda)$

Jeżeli $H_L(x^*)$ jest dodatnio określona w punkcie x^*
to x^* jest minimum lokalnym

Jeżeli $H_L(x^*)$ jest ujemnie określona w punkcie
to x^* jest maksimum lokalnym x^*

Jeżeli funkcja $F(x)$ jest wypukła, a ograniczenia są liniowe czyli mają postać $\varphi_l(x) = p_l^T x - \alpha_l = 0$, $l = 1, 2, \dots, L$ to powyższy układ równań ma jedno rozwiązanie i jest ono rozwiązaniem optymalnym

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

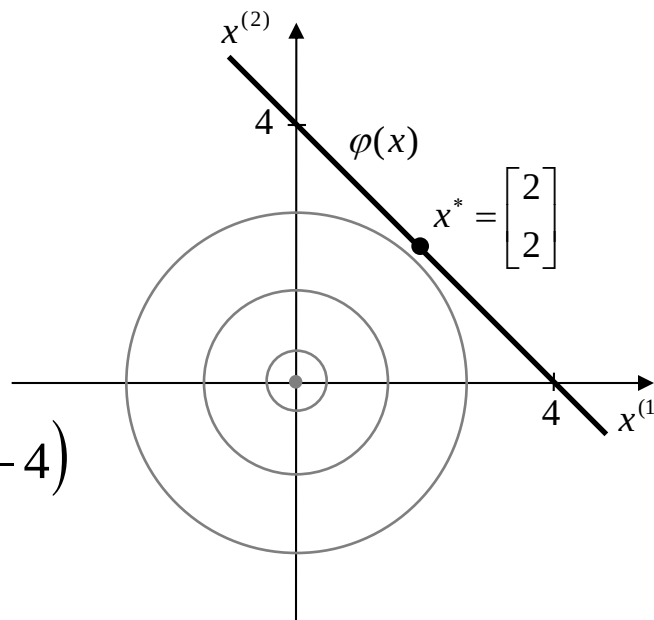
Metoda mnożników Lagrange' a

☞ Metoda Lagrange' a - Przykład 1

$$F(x) = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2$$

$$\varphi(x) = x^{(1)} + x^{(2)} - 4 = 0$$

$$L(x, \lambda) = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 + \lambda(x^{(1)} + x^{(2)} - 4)$$



Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

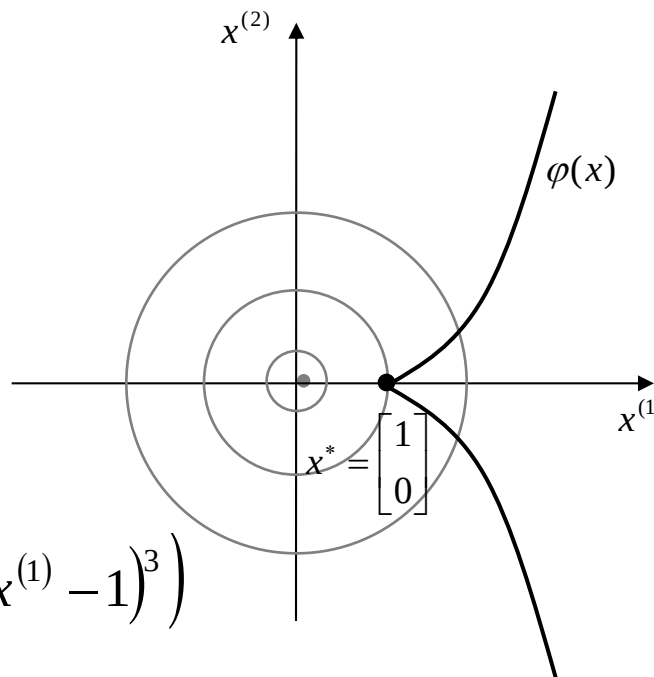
Metoda mnożników Lagrange' a

∞ Metoda współczynników Lagrange' a – Przykład 2
rozwiązanie nieregularne

$$F(x) = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2$$

$$\varphi(x) = (x^{(2)})^2 - (x^{(1)} - 1)^3 = 0$$

$$L(x, \lambda) = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 + \lambda \left((x^{(2)})^2 - (x^{(1)} - 1)^3 \right)$$



Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

Metoda mnożników Lagrange' a

Jeżeli $F(x)$ jest funkcją ciągłą, różniczkowalną i wypukłą oraz ograniczenia $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_L(x)$ są liniowe to układ równań:

$$\nabla_x L(x, \lambda) \Big|_{x^*, \lambda^*} = 0_S$$

$$\nabla_\lambda L(x, \lambda) \Big|_{x^*, \lambda^*} = 0_L$$

ma jedno rozwiązanie i jest ono rozwiązaniem zadania optymalizacji z ograniczeniami równościowymi.

Powyższy układ równań w tym przypadku jest warunkiem koniecznym i wystarczającym

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

Metoda mnożników Lagrange' a

∞ Uogólniona metoda współczynników Lagrange' a

$$\nabla_x L(x, \lambda, \lambda_0) = \lambda_0 \nabla_x F(x) + \sum_{l=1}^L \lambda_l \nabla_x \varphi_l(x) = 0_S$$

$$1^\circ \quad \lambda_0 \neq 0 \quad \nabla_x F(x) + \sum_{l=1}^L \frac{\lambda_l}{\lambda_0} \nabla_x \varphi_l(x) = 0_S \Rightarrow \nabla_x F(x) + \sum_{l=1}^L \lambda'_l \nabla_x \varphi_l(x) = 0_S$$

$$\lambda_0 = 1 \quad \nabla_x F(x) + \sum_{l=1}^L \lambda_l \nabla_x \varphi_l(x) = 0_S \quad \text{- z tego warunku otrzymamy}$$

rozwiązania regularne

$$2^\circ \quad \lambda_0 = 0 \quad \sum_{l=1}^L \lambda_l \nabla_x \varphi_l(x) = 0_S \quad \text{- z tego warunku otrzymamy rozwiązania}$$

nieregularne

Podobnie jak poprzednio otrzymane rozwiązania wymagają zbadania warunków drugiego rzędu czyli zbadania określoności macierzy:

$$H_L(x, \lambda, \lambda_0) = \nabla_{xx}^2 L(x, \lambda, \lambda_0).$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościowymi

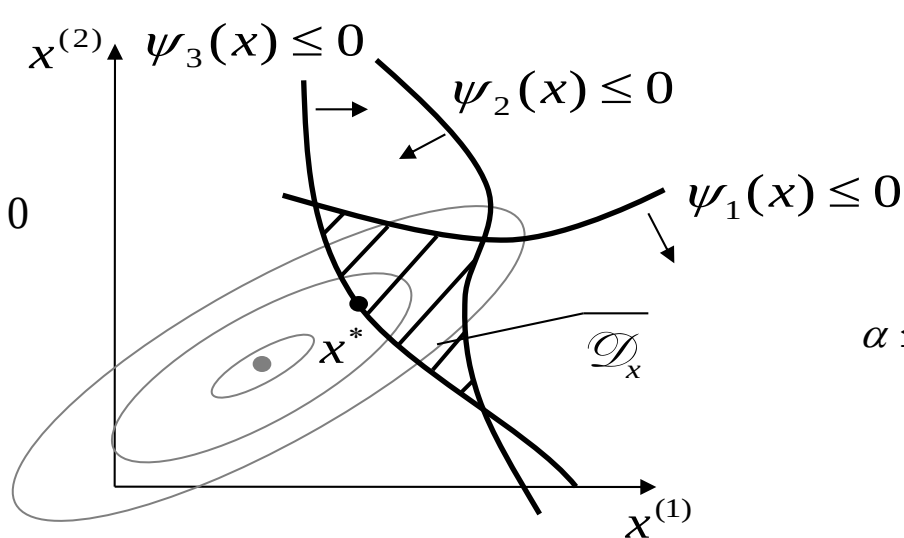
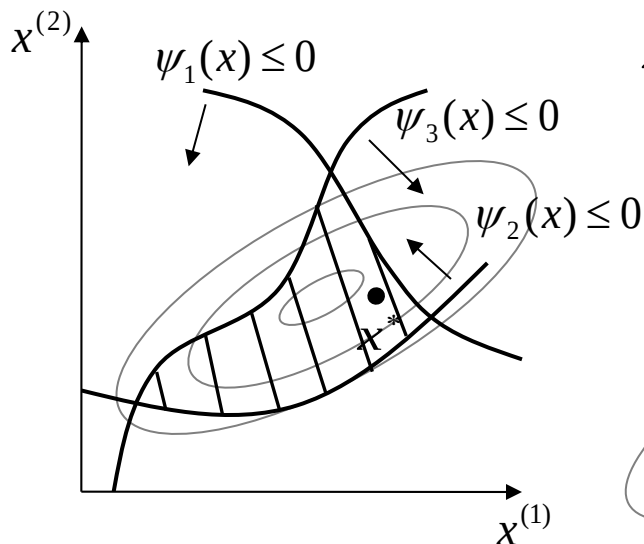
Metoda Kuhna – Tucker'a

Zadanie optymalizacji:

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^S : \psi_1(x) \leq 0, \psi_2(x) \leq 0, \dots, \psi_M(x) \leq 0 \right\}$$

$$\mathcal{D}_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^S : \psi(x) \leq 0_M \right\} \quad \text{gdzie:} \quad \psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_M(x) \end{bmatrix} \quad 0_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \left\} M$$



$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{bmatrix}$$

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \forall_{s=1, \dots, S} \alpha_s \leq \beta_s$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościami

Metoda Kuhna – Tucker'a

Funkcja Lagrange' a:

$$L(x, \mu) = F(x) + \mu^T \psi(x) \Leftrightarrow L(x, \mu) = F(x) + \sum_{m=1}^M \mu_m \psi_m(x) \quad \text{gdzie: } \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_M \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- wektor} \\ \text{współczynników} \\ \text{Lgrange' a} \end{array}$$

Warunki konieczne optymalności:

$$\nabla_x L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} = 0_S$$

$$\mu^T \nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} = 0$$

$$\nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} \leq 0_M$$

$$\mu^* \geq 0_M$$

$\Leftrightarrow$ gdy rozwiązanie jest regularne

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{bmatrix}$$

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \forall_{s=1, \dots, S} \alpha_s \leq \beta_s$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościowymi

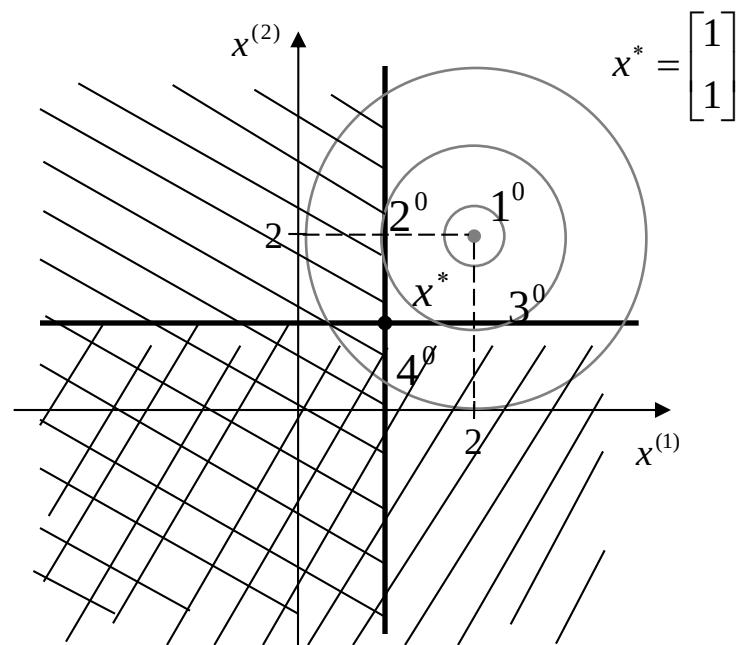
Metoda Kuhna – Tucker'a

Przykład 1

$$F(x) = (x^{(1)} - 2)^2 + (x^{(2)} - 2)^2$$

$$\psi_1(x) = x^{(1)} - 1 \leq 0$$

$$\psi_2(x) = x^{(2)} - 1 \leq 0$$



$$L(x, \lambda) = (x^{(1)} - 2)^2 + (x^{(2)} - 2)^2 + \mu_1(x^{(1)} - 1) + \mu_2(x^{(2)} - 1)$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościowymi

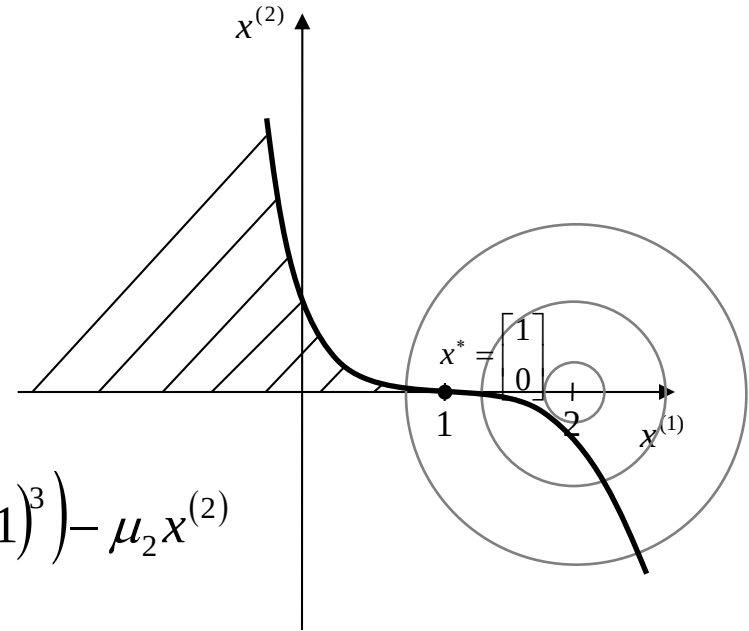
Metoda Kuhna – Tucker'a

Przykład 2 – rozwiązanie nieregularne

$$F(x) = (x^{(1)} - 2)^2 + (x^{(2)})^2$$

$$\psi_1(x) = x^{(2)} + (x^{(1)} - 1)^3 \leq 0$$

$$\psi_2(x) = -x^{(2)} \leq 0$$



$$L(x, \lambda) = (x^{(1)} - 2)^2 + (x^{(2)})^2 + \mu_1 (x^{(2)} + (x^{(1)} - 1)^3) - \mu_2 x^{(2)}$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościami

Metoda Kuhna – Tucker’a Warunki regularności rozwiązania

1. Karlina: ograniczenia $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_M(x)$ - liniowe
2. Slatera: ograniczenia $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_M(x)$ - wypukłe oraz zbiór rozwiązań dopuszczalnych ma niepuste wnętrze
3. Fiacco – Mac Cormica: w punkcie optymalnym gradienty wszystkich ograniczeń aktywnych są liniowo niezależne, czyli:

$$\forall m \in I(x^*) \quad \nabla_x \psi_m(x^*) \Big|_{x=x^*} \text{ są liniowo niezależne}$$

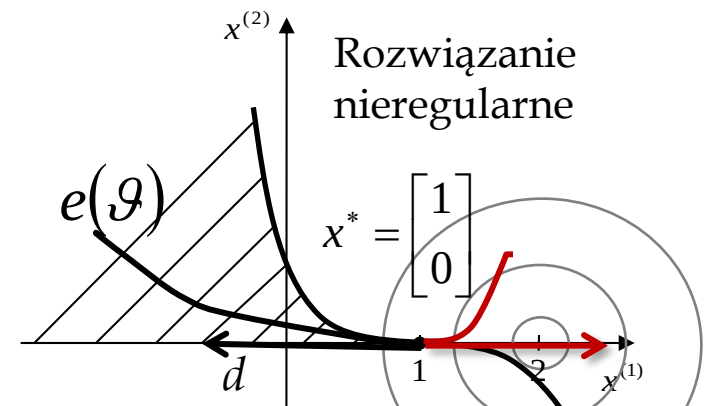
$$4. \text{Zangwila: } \mathcal{D}(x^*) = \overline{D}(x^*)$$

5. Kuhna – Tucker’a: dla każdego kierunku $d \in \mathcal{D}(x^*)$ istnieje krzywa regularna rozpoczynająca się w punkcie x^* i styczna do tego kierunku

$$\forall d \in \mathcal{D}(x^*) \quad \exists e(\vartheta), \quad \vartheta \in [0, 1]$$

- $e(0) = x^*$
- $e(\vartheta) \in D_x \quad \forall \vartheta \in [0, 1]$
- $\frac{de(\vartheta)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = \tau \cdot d$

$$e(\vartheta) = \begin{bmatrix} e_1(\vartheta) \\ e_2(\vartheta) \\ \vdots \\ e_s(\vartheta) \end{bmatrix}$$



Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościovymi Metoda Kuhna – Tucker'a

Warunki konieczna i wystarczające:

Jeżeli funkcje $F(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_M(x)$ są ciągłe i różniczkowalne oraz funkcja $F(x)$ jest funkcją pseudo – wypukłą, a ograniczenia $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_M(x)$ są funkcjami quasi – wypukłymi to wkład równań i nierówności:

$$\begin{aligned}\nabla_x L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} &= 0_S \\ \mu^T \nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} &= 0 \\ \nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} &\leq 0_M \\ \mu^* &\geq 0_M\end{aligned}$$

ma jedno rozwiązanie i jest ono rozwiązaniem zadania optymalizacji z ograniczeniami nierównościovymi

Szczególny przypadek

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S : x \geq 0_S, \psi(x) \leq 0_M\}$$

$$L(x, \mu) = F(x) + \mu^T \psi(x)$$

$$\nabla_x L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} \geq 0_S$$

$$\nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} \leq 0_M$$

$$x^T \nabla_x L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} = 0$$

$$\mu^T \nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} = 0$$

$$x^* \geq 0_S$$

$$\mu^* \geq 0_M$$

Szczególny przypadek

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S : \varphi(x) = 0_L, \psi(x) \leq 0_M\}$$

$$L(x, \lambda, \mu) = F(x) + \lambda^T \varphi(x) + \mu^T \psi(x)$$

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} = 0_S$$

$$\nabla_\lambda L(x, \lambda, \mu) \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} = 0_L$$

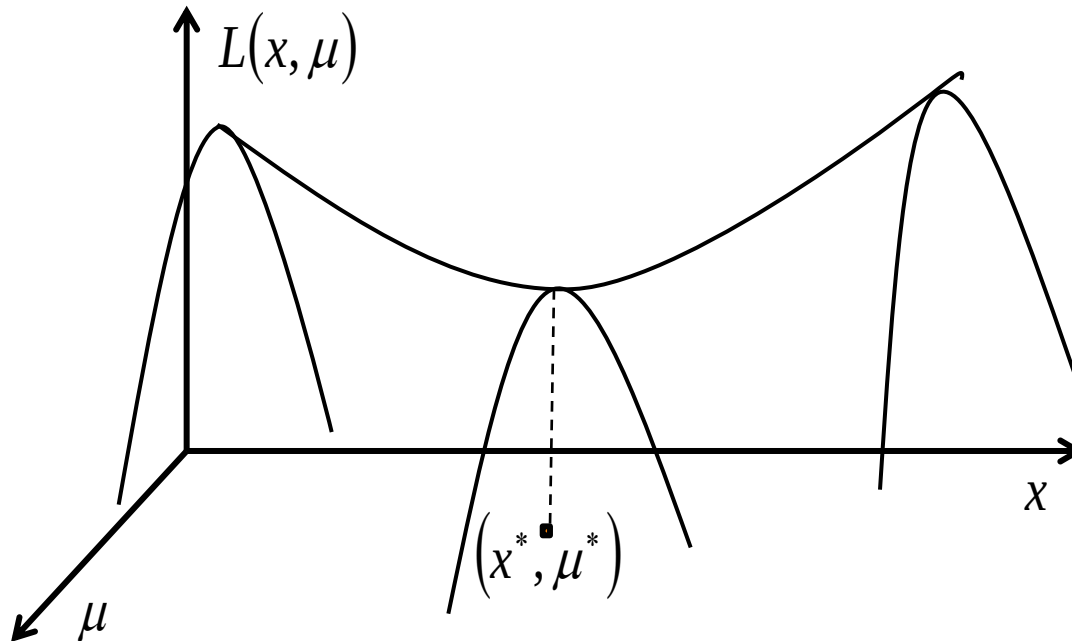
$$\mu^T \nabla_\mu L(x, \lambda, \mu) \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} = 0$$

$$\nabla_\mu L(x, \lambda, \mu) \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} \leq 0_M$$

$$\mu^* \geq 0_S$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościami - Punkt siodłowy

Punkt siodłowy (x^*, μ^*)



$$L(x^*, \mu^*) \leq L(x, \mu^*) \quad \forall x \in \mathcal{D}(x) \subseteq \mathcal{R}^s$$

$$L(x^*, \mu) \leq L(x^*, \mu^*) \quad \forall \mu \geq 0_M$$

$$L(x^*, \mu^*) = \min_{x \in \mathcal{D}(x)} \max_{\mu \geq 0_M} L(x, \mu)$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościami - Punkt siodłowy

Punkt (x^*, μ^*) jest punktem siodłowym $(x \in \mathcal{D}(x), \mu \geq 0_M) \Leftrightarrow$

1. x^* – minimalizuje $L(x, \mu)$
2. $\psi_m(x^*) \leq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$
3. $\mu^* \psi_m(x^*) = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$

Jeżeli (x^*, μ^*) jest punktem siodłowym funkcji Lagrange'a $L(x, \mu)$ to jest rozwiązaniem zadania optymalizacji:

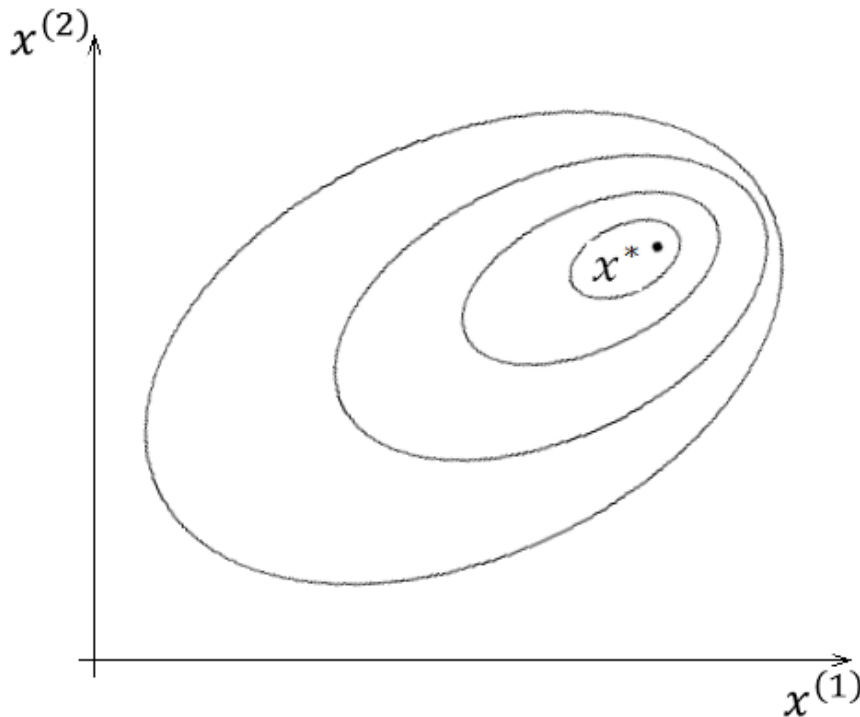
$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S : \psi_1(x) \leq 0, \psi_2(x) \leq 0, \dots, \psi_M(x) \leq 0\}$$

Numeryczne metody optymalizacji



$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in D_x} F(x)$$



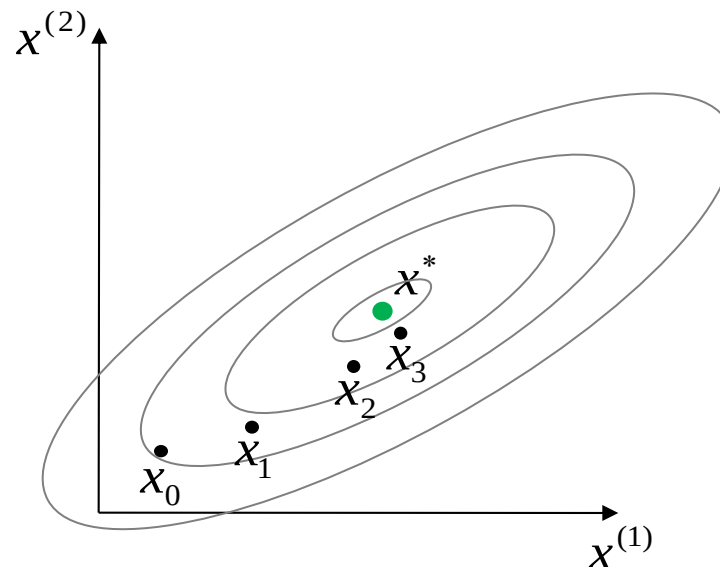
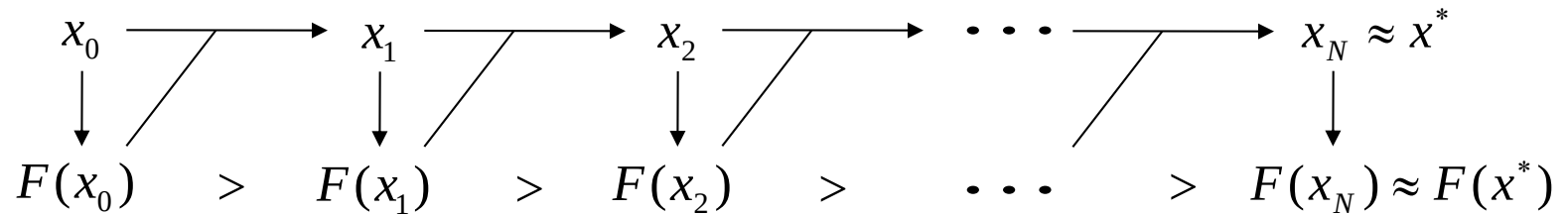
Problemy analityczne:

1. Nieliniowa złożona funkcja celu F i ograniczeń φ oraz ψ .
2. Nieróżniczkowalność funkcji F , φ oraz ψ .
3. Nie jest znana postać analityczna funkcji F , φ oraz ψ , można jedynie „zmierzyć” wartość funkcji
4. Duży wymiar wektora zmiennych decyzyjnych.

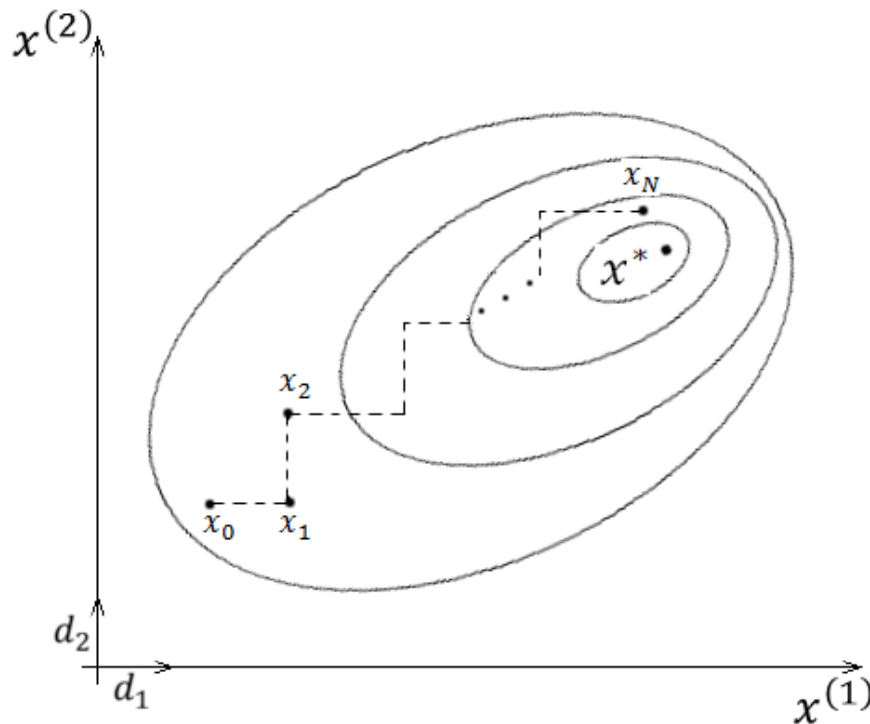
Metody numeryczne

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x^* \in \mathcal{D}_x} F(x),$$

Konstruujemy ciąg przybliżeń na podstawie wartości funkcji $F(x)$ w danym punkcie x



Numeryczne metody optymalizacji



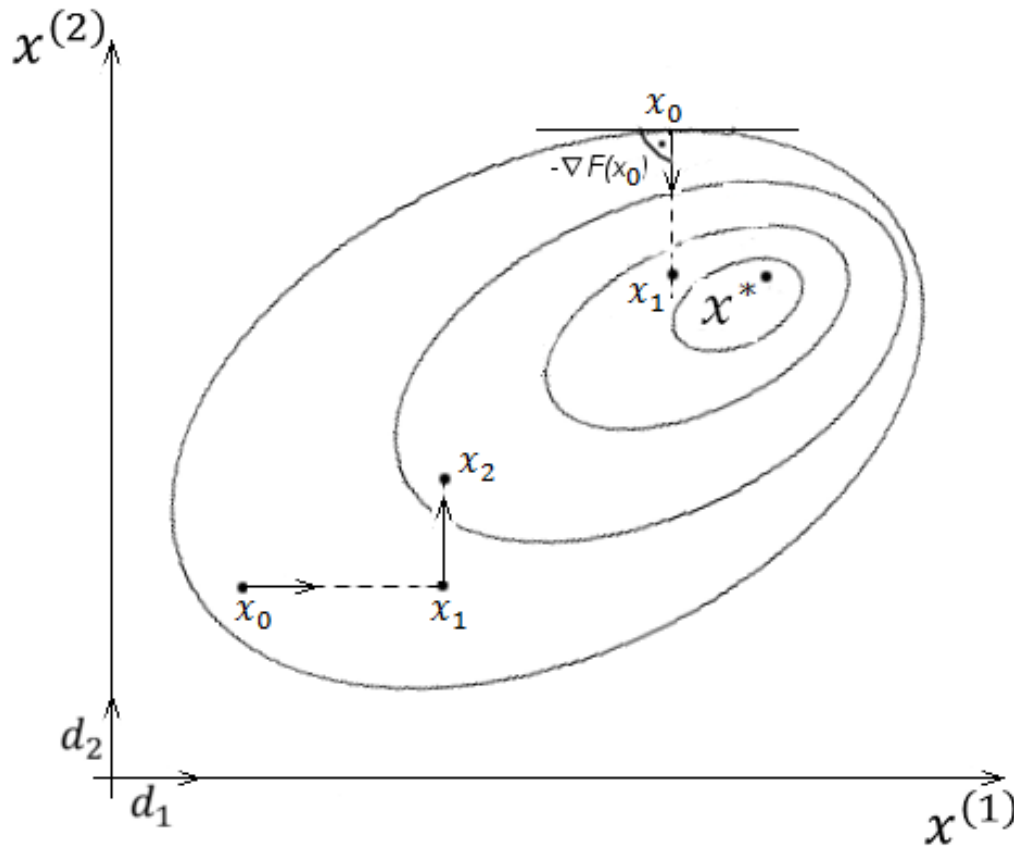
Algorytm

$$x_{n+1} = \Psi(x_n), x_0$$

- Wybór kierunku poszukiwań.
- Optymalizacja w kierunku.
- Warunki zatrzymania procedury.

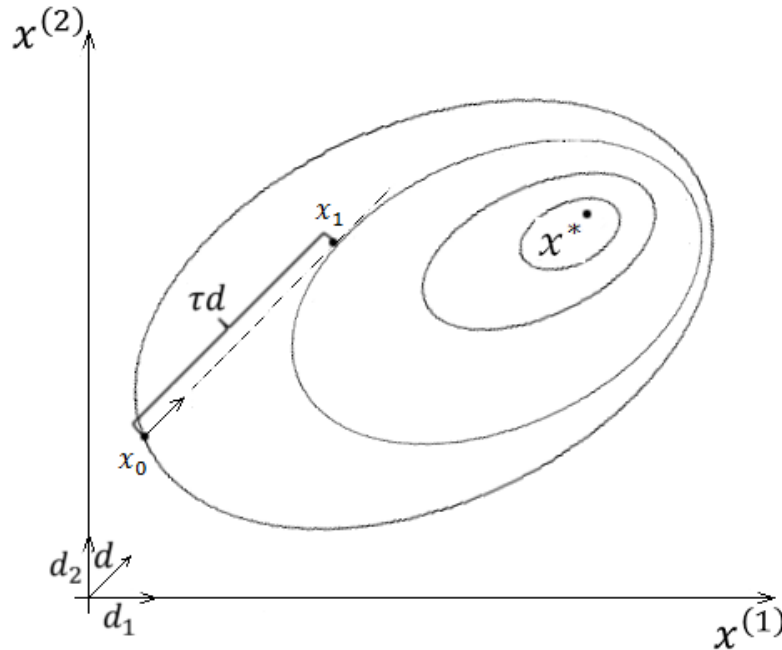
$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, x_N \approx x^*$$
$$F(x_0) > F(x_1) > \dots > F(x_n) > \dots > F(x_N) \approx F(x^*)$$

Wybór kierunku poszukiwań



- Kierunki bazowe i ich modyfikacje – metody bez gradientowe.
- Kierunki oparte na gradiencie funkcji – metody gradientowe.
- Inne

Optymalizacja w kierunku



x_0 - punkt początkowy
 x_1 - punkt końcowy
 d - kierunek
 τ - długość kroku w kierunku

$$\tau^* \rightarrow F(x_0 + \tau^* d) = \min_{\tau} F(x_0 + \tau d)$$

x_0, d - ustalone $F(x_0 + \tau d) \triangleq f(\tau)$

$f(\tau)$ - funkcja jednej zmiennej (długości kroku τ)

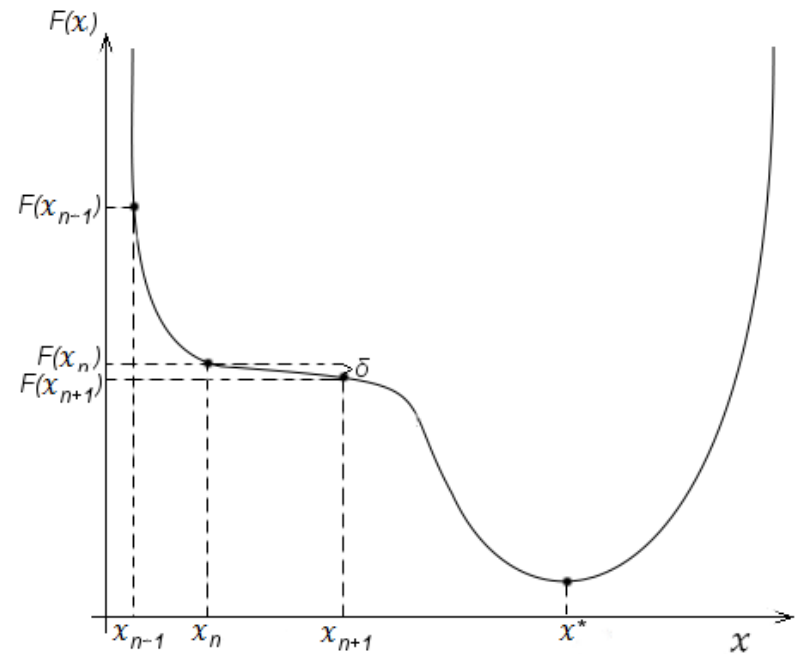
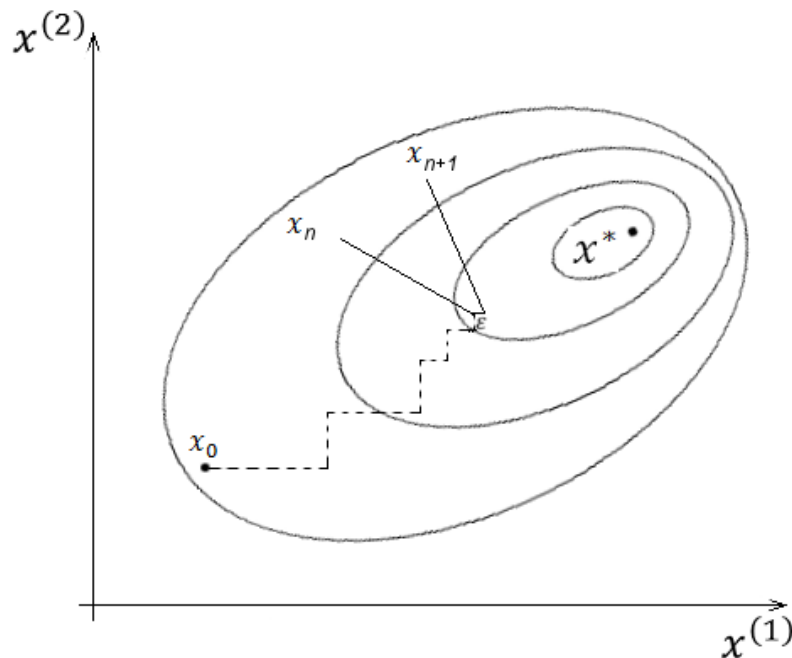
$$\tau^* \rightarrow f(\tau^*) = \min_{\tau} f(\tau)$$

optymalizacja w kierunku $\equiv$ optymalizacja funkcji jednej zmiennej

Warunki zatrzymania procedury

$$\|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon; \quad |F(x_{n+1}) - F(x_n)| < \delta; \quad \frac{|F(x_{n+1}) - F(x_n)|}{\|x_{n+1} - x_n\|} < \varrho$$

Uwaga!

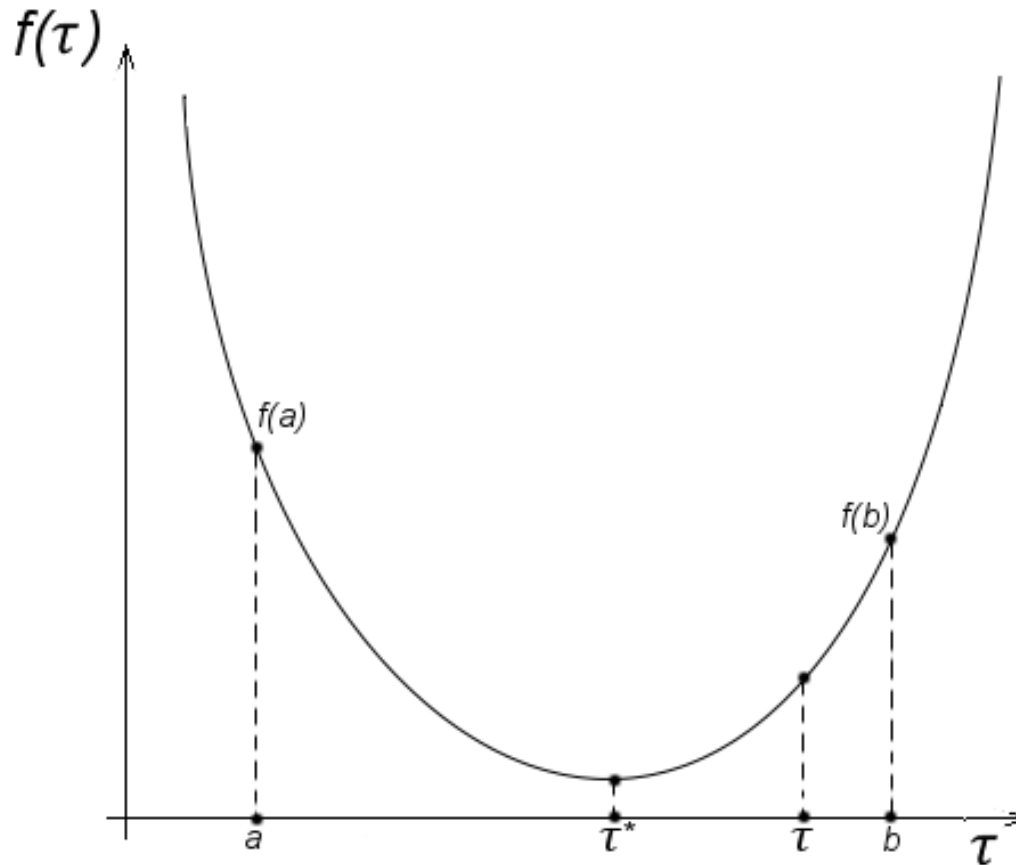


Metody optymalizacji w kierunku

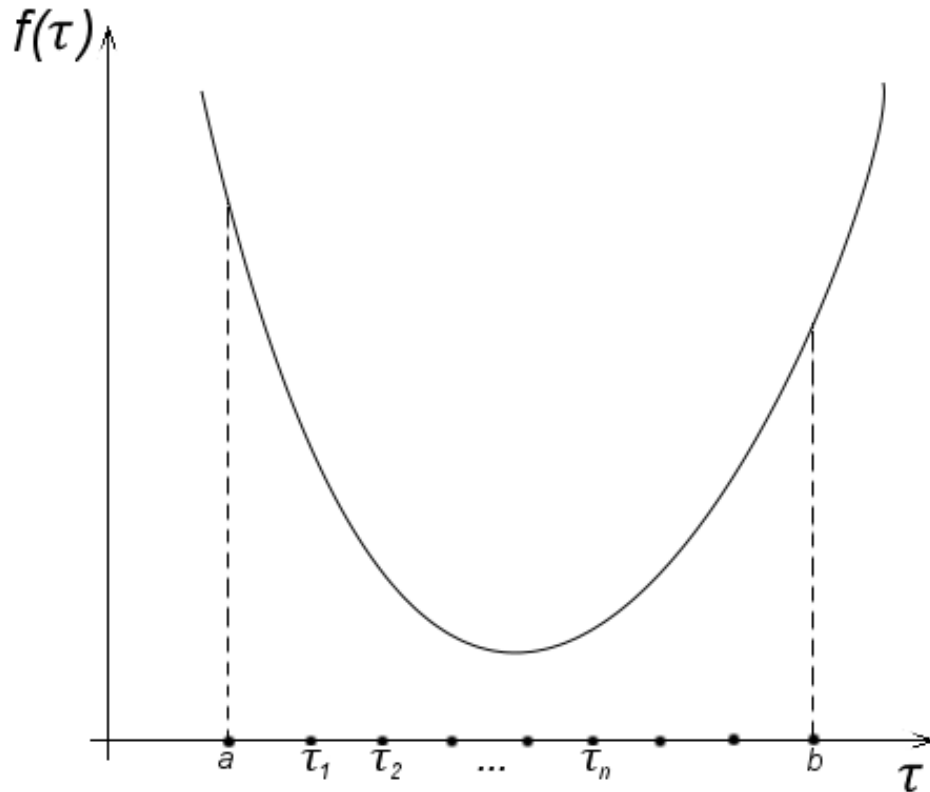
- ✎ Metody optymalizacji w kierunku
 - Podział równomierny
 - Podział na połowę
 - Złoty podział
 - Aproksymacji kwadratowej
 - Metoda pierwszej pochodnej
 - Metoda znaku pochodnej
 - Metoda Newtona
 - Metoda Bolzano

Metody zawężania odcinka

Założenie: $\tau^* \in [a, b]$



Podział równomierny



$N = \left\lceil \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil$ - liczba wyliczeń wartości funkcji

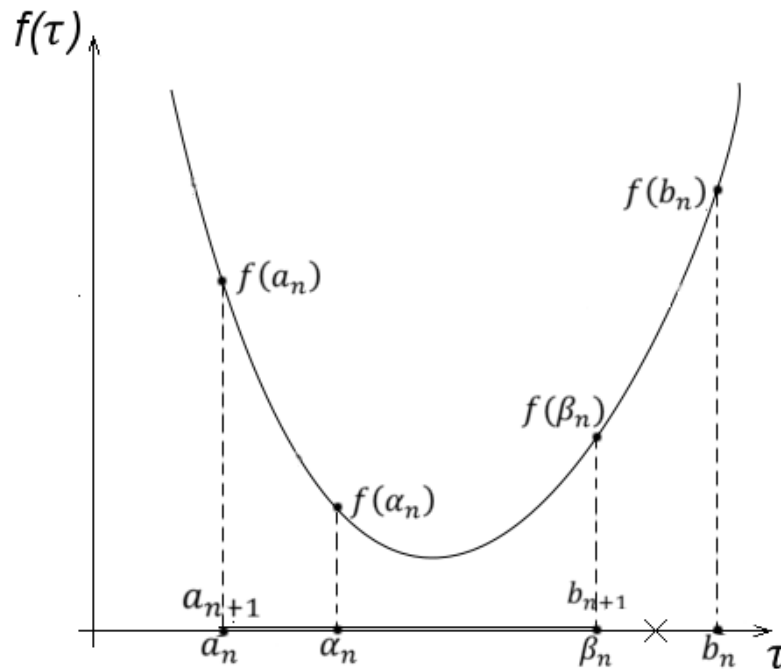
$$\tau_0 = a$$

$$\tau_n = \tau_0 + n\varepsilon$$

$$\tau^* \approx \tilde{\tau} \rightarrow f(\tilde{\tau}) = \min_{1 \leq n \leq N} \{f(\tau_n)\}$$

Zawężanie odcinka

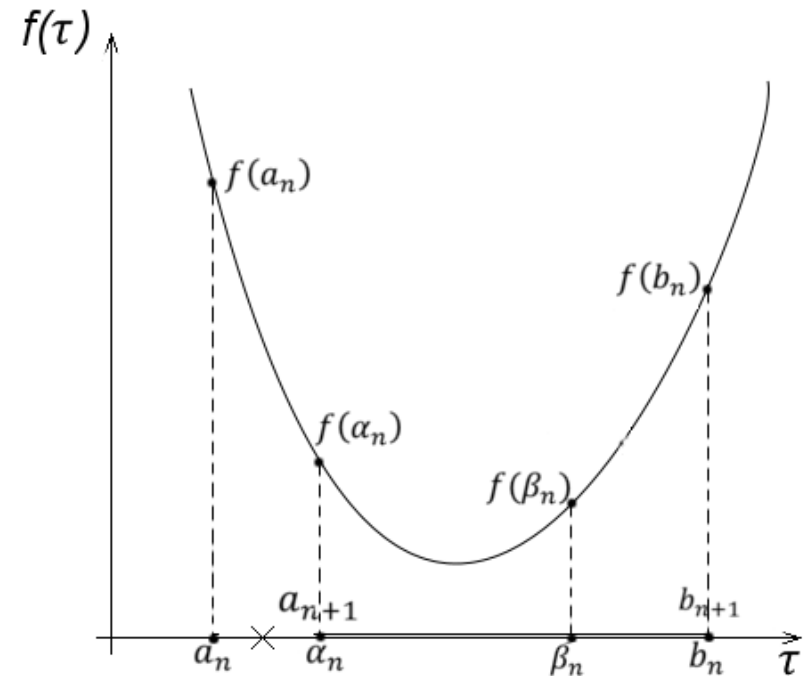
$f(\alpha_n)? f(\beta_n)$



$$f(\alpha_n) \leq f(\beta_n)$$

$$a_{n+1} := a_n$$

$$b_{n+1} := \beta_n$$

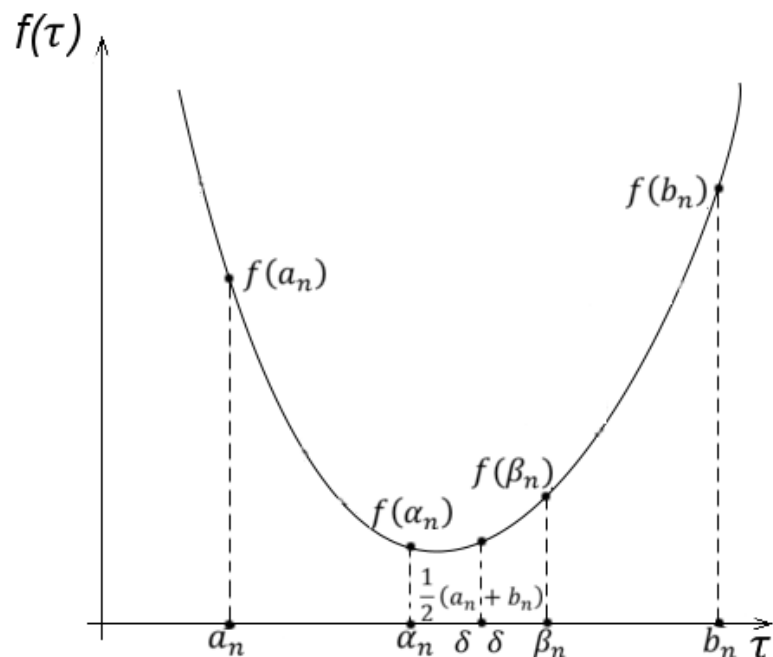


$$f(\alpha_n) > f(\beta_n)$$

$$a_{n+1} := \alpha_n$$

$$b_{n+1} := b_n$$

Metoda podziału na połowę



$$\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \delta$$

$$\beta_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \delta$$

$N = ?$

Dane: $a_0, b_0, \varepsilon, \delta$

Krok 0: $n = 0$

Krok 1: $\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \delta$

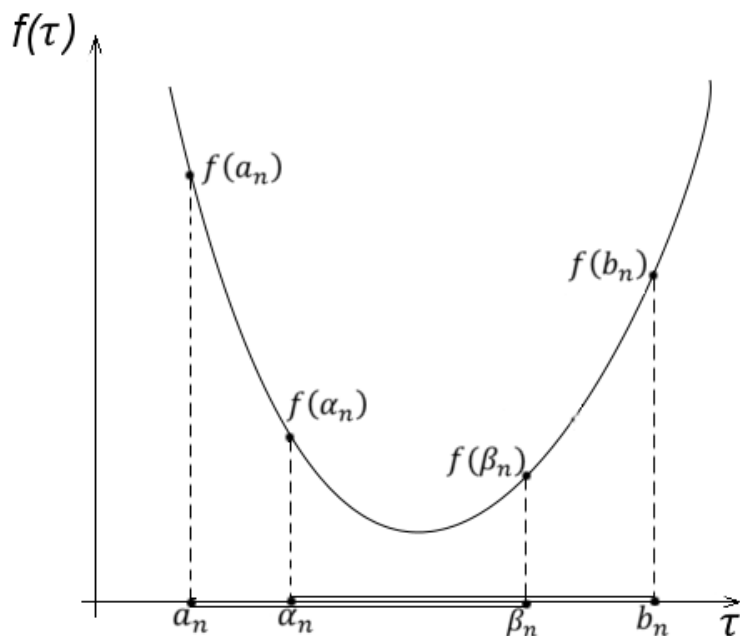
$$\beta_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \delta$$

Krok 2: Jeśli $f(\alpha_n) \leq f(\beta_n)$ to
 $a_{n+1} := a_n, b_{n+1} := \beta_n$,
 w przeciwnym razie

$$a_{n+1} := \alpha_n, b_{n+1} := b_n.$$

Krok 3: Jeśli $|b_{n+1} - a_{n+1}| \geq \varepsilon$ to
 $n := n + 1$, idź do kroku 1,
 w przeciwnym razie
 $\tilde{\tau} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$ (STOP)

Metoda γ podziału



$$\frac{b_n - \alpha_n}{b_n - a_n} = \frac{\beta_n - a_n}{b_n - a_n} = \gamma$$

$$\alpha_n = b_n + \gamma(a_n - b_n)$$

$$\beta_n = a_n + \gamma(b_n - a_n)$$

$N = ?$

Dane: $a_0, b_0, \varepsilon, \gamma$

Krok 0: $n = 0$

Krok 1: $\alpha_n = b_n + \gamma(a_n - b_n)$

$\beta_n = a_n + \gamma(b_n - a_n)$

Krok 2: Jeśli $f(\alpha_n) \leq f(\beta_n)$ to

$a_{n+1} := a_n, b_{n+1} := \beta_n,$

w przeciwnym razie

$a_{n+1} := \alpha_n, b_{n+1} := b_n.$

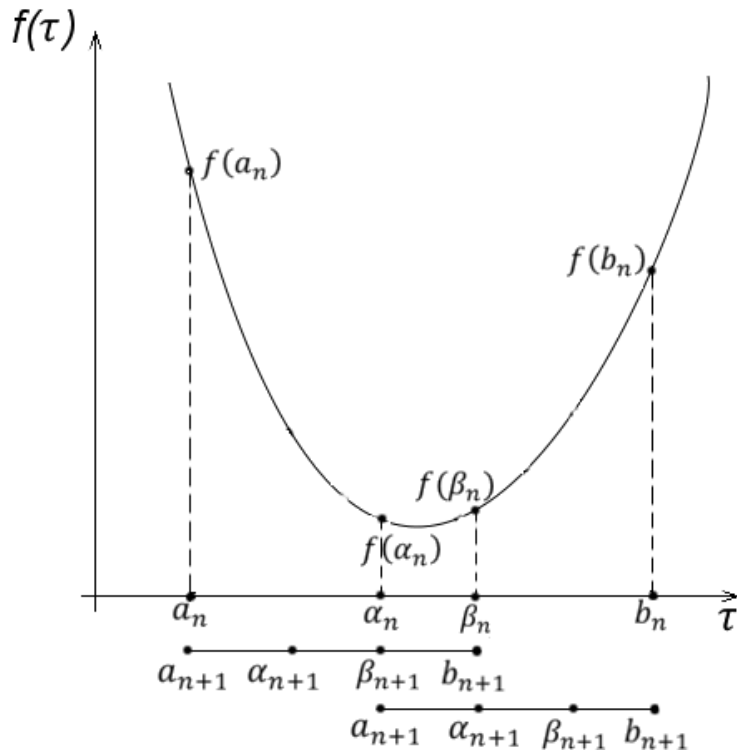
Krok 3: Jeśli $|b_{n+1} - a_{n+1}| \geq \varepsilon$ to

$n := n + 1$, idź do kroku 1,

w przeciwnym razie

$\tilde{\tau} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$ (STOP)

Metoda złotego podziału



$$\gamma^2 + \gamma - 1 = 0$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$$

$$N = ?$$

Dane: $a_0, b_0, \varepsilon, \gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Krok 0: $n = 0$

$$\alpha_0 = b_0 + \gamma(a_0 - b_0)$$

$$\beta_0 = a_0 + \gamma(b_0 - a_0)$$

Krok 1: Jeśli $|b_n - a_n| < \varepsilon$, to

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \text{ (STOP)}$$

w przeciwnym razie $\rightarrow$ krok 2

Krok 2: Jeśli $f(\alpha_n) \leq f(\beta_n)$ to

$$a_{n+1} := a_n, b_{n+1} := \beta_n,$$

$$\beta_{n+1} := \alpha_n,$$

$$\alpha_{n+1} := \beta_n + \gamma(a_n - b_n)$$

$n := n + 1$, idź do kroku 1

w przeciwnym razie

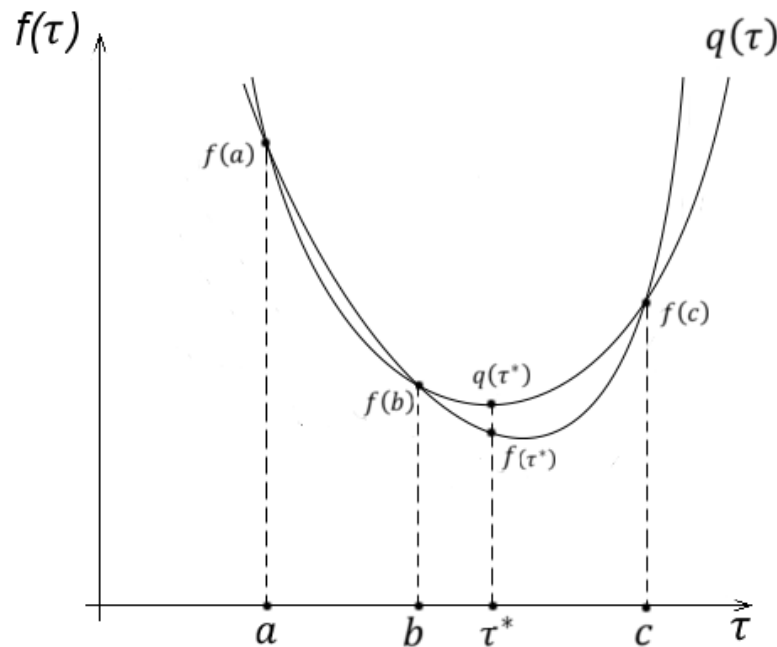
$$a_{n+1} := \alpha_n, b_{n+1} := b_n,$$

$$\alpha_{n+1} := \beta_n,$$

$$\beta_{n+1} := \alpha_n + \gamma(b_n - \alpha_n)$$

$n := n + 1$, idź do kroku 1

Metoda aproksymacji kwadratowej



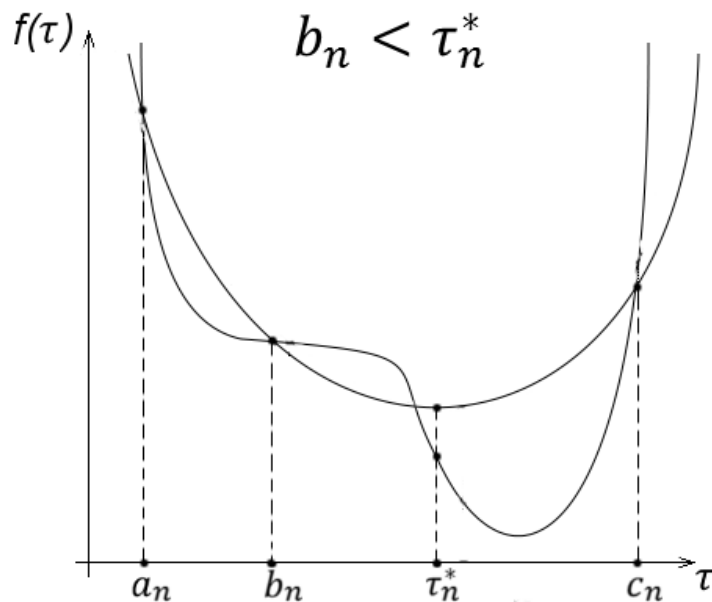
$$\begin{aligned} a &< b < c \\ f(a) &\geq f(b) \\ f(b) &\leq f(c) \end{aligned}$$

$q(\tau)$ – aproksymacja kwadratowa
 τ^* - minimum funkcji $q(\tau)$

$$q(\tau) = \frac{f(a)(\tau - b)(\tau - c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{f(b)(\tau - a)(\tau - c)}{(b - a)(b - c)} + \frac{f(c)(\tau - a)(\tau - b)}{(c - a)(b - c)}$$

$$\tau^* = \frac{1}{2} \frac{f(a)(b^2 - c^2) + f(b)(c^2 - a^2) + f(c)(a^2 - b^2)}{f(a)(b - c) + f(b)(c - a) + f(c)(a - b)}$$

Metoda aproksymacji kwadratowej



$$f(b_n) \geq f(\tau_n^*)$$

$$a_{n+1} := b_n$$

$$b_{n+1} := \tau_n^*$$

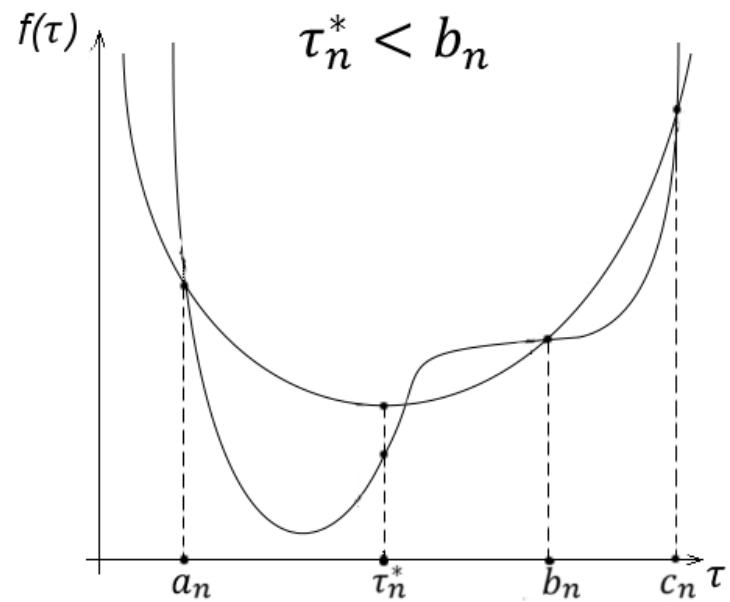
$$c_{n+1} := c_n$$

$$f(b_n) < f(\tau_n^*)$$

$$a_{n+1} := a_n$$

$$b_{n+1} := b_n$$

$$c_{n+1} := \tau_n^*$$



$$f(b_n) \geq f(\tau_n^*)$$

$$a_{n+1} := a_n$$

$$b_{n+1} := \tau_n^*$$

$$c_{n+1} := b_n$$

$$f(b_n) \geq f(\tau_n^*)$$

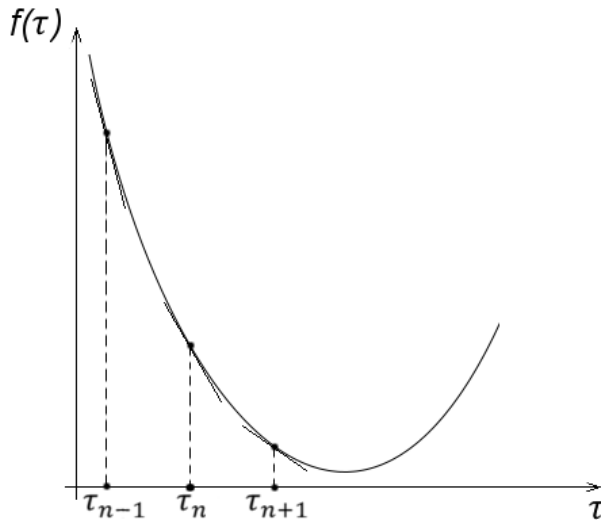
$$a_{n+1} := \tau_n^*$$

$$b_{n+1} := b_n$$

$$c_{n+1} := c_n$$

$$|c_{n+1} - a_{n+1}| < \varepsilon \quad \tilde{\tau} = \tau_{n+1}^*$$

Metoda pierwszej pochodnej



$$\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n f'(\tau_n) \quad \gamma_n > 0, \tau_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty$$

$$\text{np. } |\tau_{n+1} - \tau_n| < \varepsilon \quad (\text{STOP})$$

$$\tau_0$$

$$\tau_1 = \tau_0 - \gamma_0 f'(\tau_0)$$

$$\tau_2 = \tau_1 - \gamma_1 f'(\tau_1) = \tau_0 - \gamma_0 f'(\tau_0) - \gamma_1 f'(\tau_1)$$

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n f'(\tau_n) = \dots = \tau_0 - \gamma_0 f'(\tau_0) - \gamma_1 f'(\tau_1) - \dots - \gamma_n f'(\tau_n)$$

$$|\tau_{n+1} - \tau_0| = \left| \sum_{k=0}^n \gamma_k f'(\tau_k) \right| \leq \sum_{k=0}^n \gamma_k |f'(\tau_k)| \leq \max_{0 \leq k \leq n} |f'(\tau_k)| \sum_{k=0}^n \gamma_k$$

$$|\tau_{\infty} - \tau_0| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty$$

Metoda znaku pierwszej pochodnej

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \vartheta_n \operatorname{sign}[f'(\tau_n)]$$

$$\gamma_n f'(\tau_n) = \gamma_n |f'(\tau_n)| * \operatorname{sign} f'(\tau_n) = \vartheta_n \operatorname{sign}[f'(\tau_n)], \text{ gdzie } \vartheta_n = \gamma_n |f'(\tau_n)|$$

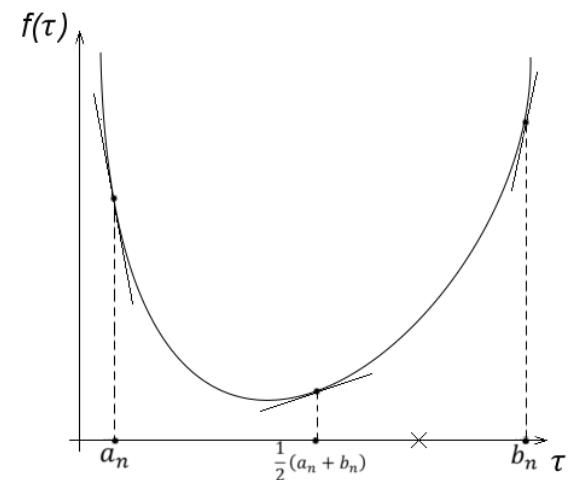
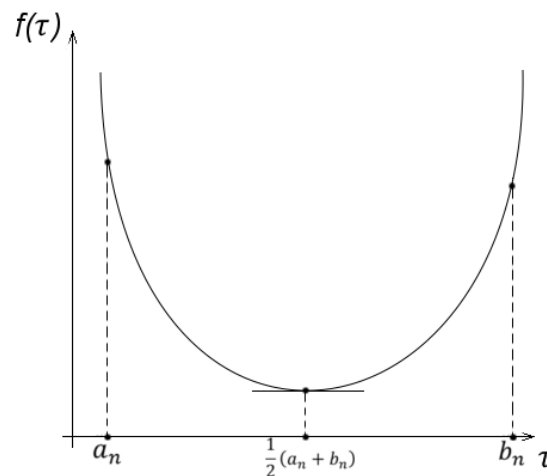
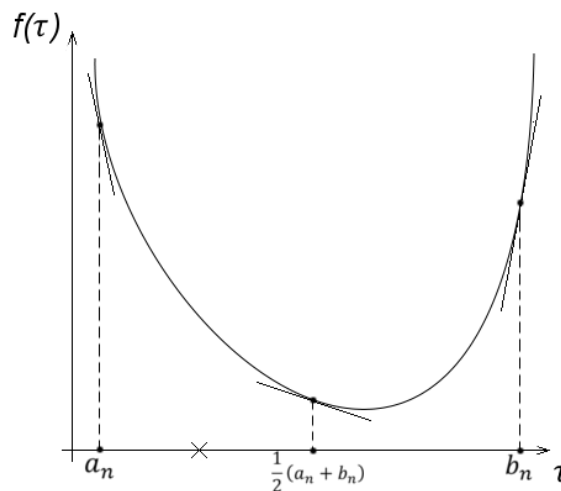
$$\vartheta_n > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = 0, \text{ bo } \lim_{n \rightarrow \infty} |f'(\tau_n)| = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n = \infty \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n |f'(\tau_n)| = 0$$

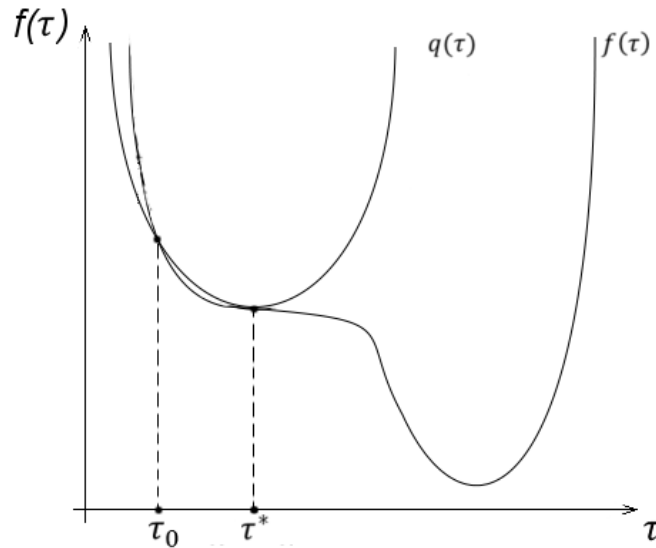
Metoda Bolzano

$$\text{sign } a_n \neq \text{sign } b_n$$



$$\begin{aligned} \text{sign } a_n &= \text{sign}\left(f'\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right)\right) & f'\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) &= 0 & \text{sign } b_n &= \text{sign}\left(f'\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right)\right) \\ a_{n+1} &:= \frac{1}{2}(a_n + b_n) & \tilde{\tau} &:= \frac{1}{2}(a_n + b_n) & a_{n+1} &:= a_n \\ b_{n+1} &:= b_n & (\text{rzadko}) & & b_{n+1} &:= \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{aligned}$$

Metoda drugiej pochodnej



$$\tau_0$$
$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{f'(\tau_n)}{f''(\tau_n)}$$
$$|\tau_{n+1} - \tau_n| < \varepsilon \text{ (STOP)}$$

$$f(\tau) = \underbrace{f(\tau_0) + (\tau - \tau_0)f'(\tau_0) + \frac{1}{2}(\tau - \tau_0)^2 f''(\tau_0)}_{q(\tau)} + o_3(|\tau - \tau_0|)$$

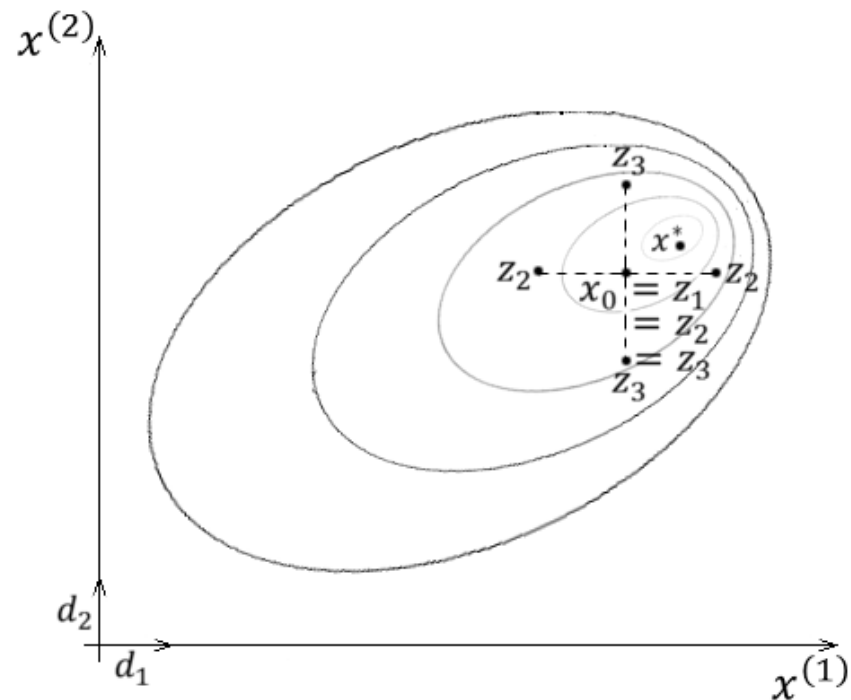
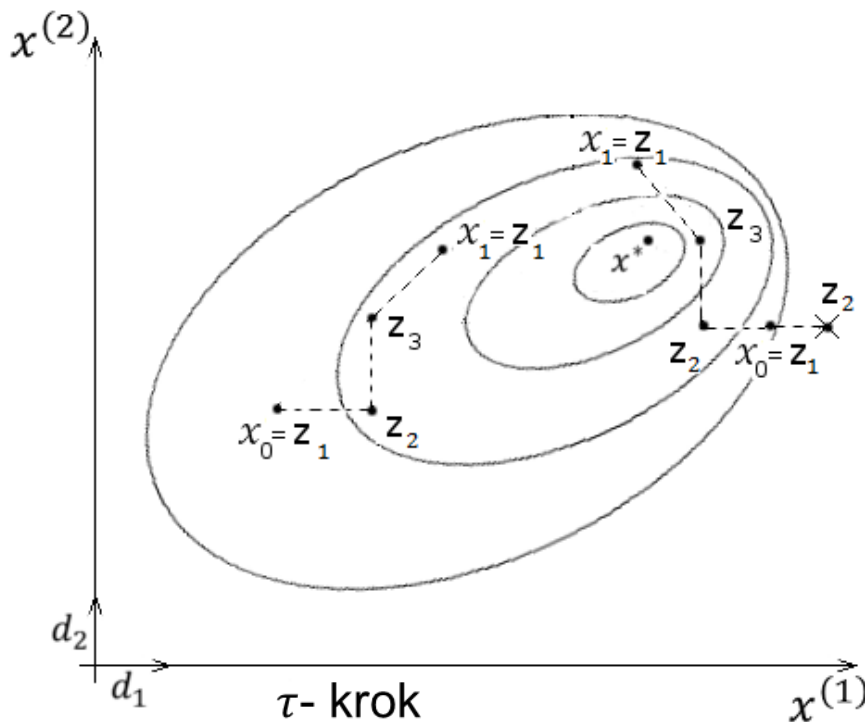
$$q'(\tau) = f'(\tau_0) + (\tau^* - \tau_0)f''(\tau_0) = 0$$

$$\tau^* = \tau_0 - \frac{f'(\tau_0)}{f''(\tau_0)}$$

Bezgradientowe metody optymalizacji

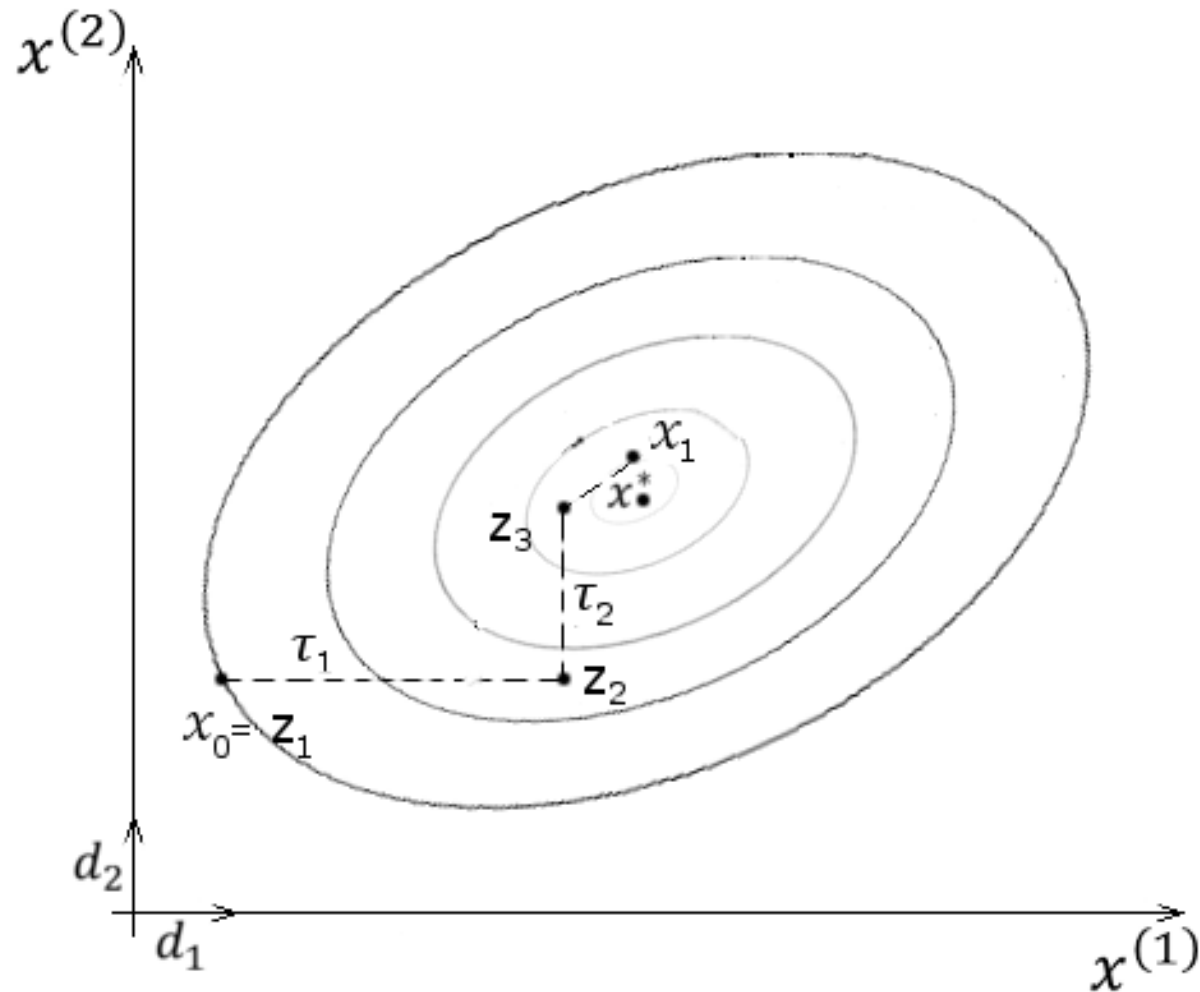
- ⌘ Bezgradientowe metody optymalizacji
 - Hooka-Jeevesa (z krokiem dyskretnym i optymalnym)
 - Rosenbrocka (z krokiem dyskretnym i optymalnym)
 - Powella
 - Neldera Meada

Metoda Hooka-Jeeveesa – z krokiem dyskretnym

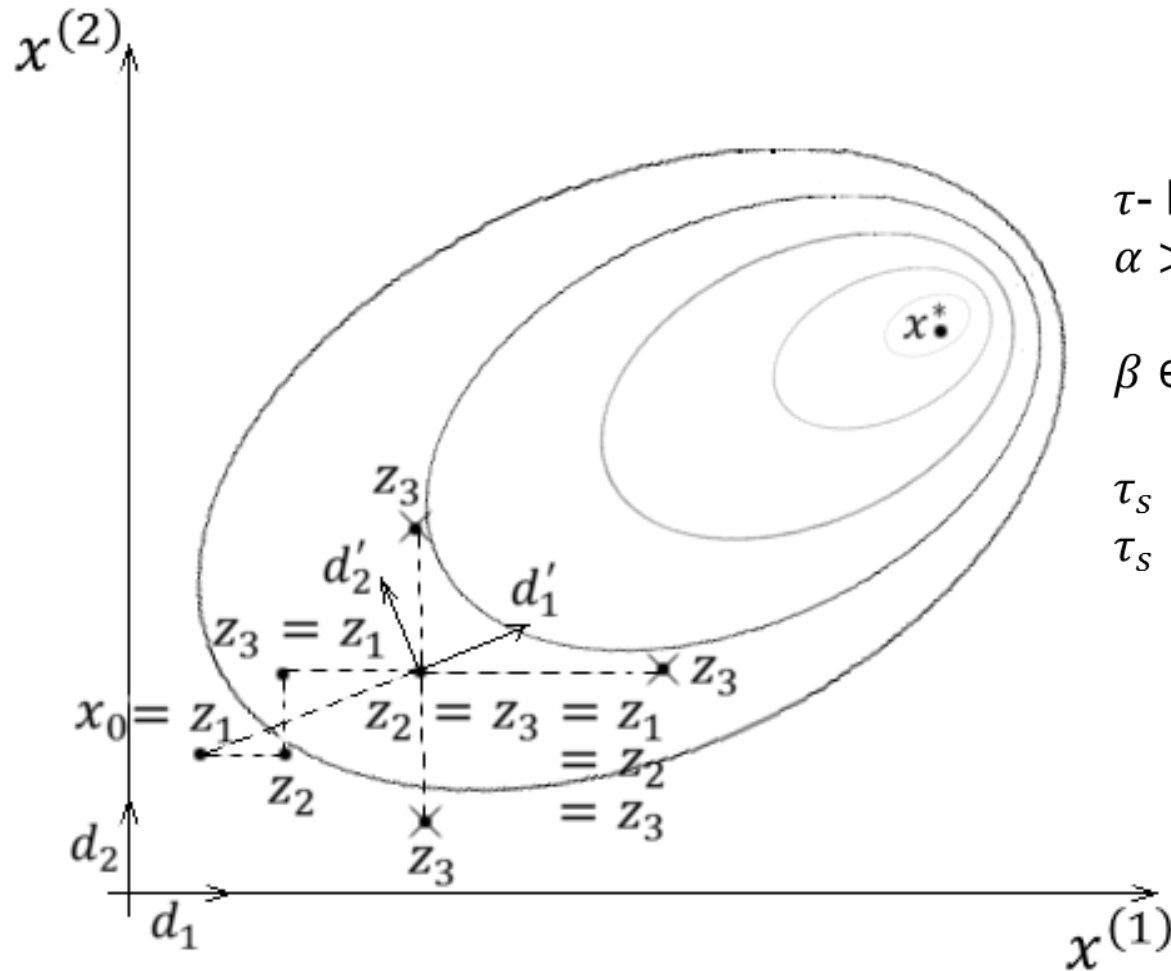


$\alpha > 1$ współczynnik kroku roboczego
 $\beta \in (0,1)$ współczynnika korekcji kroku
 $\tau := \tau\beta$

Metoda Hooka-Jeeveesa – z krokiem optymalnym



Metoda Rozenbrocka – z krokiem dyskretnym



τ - krok

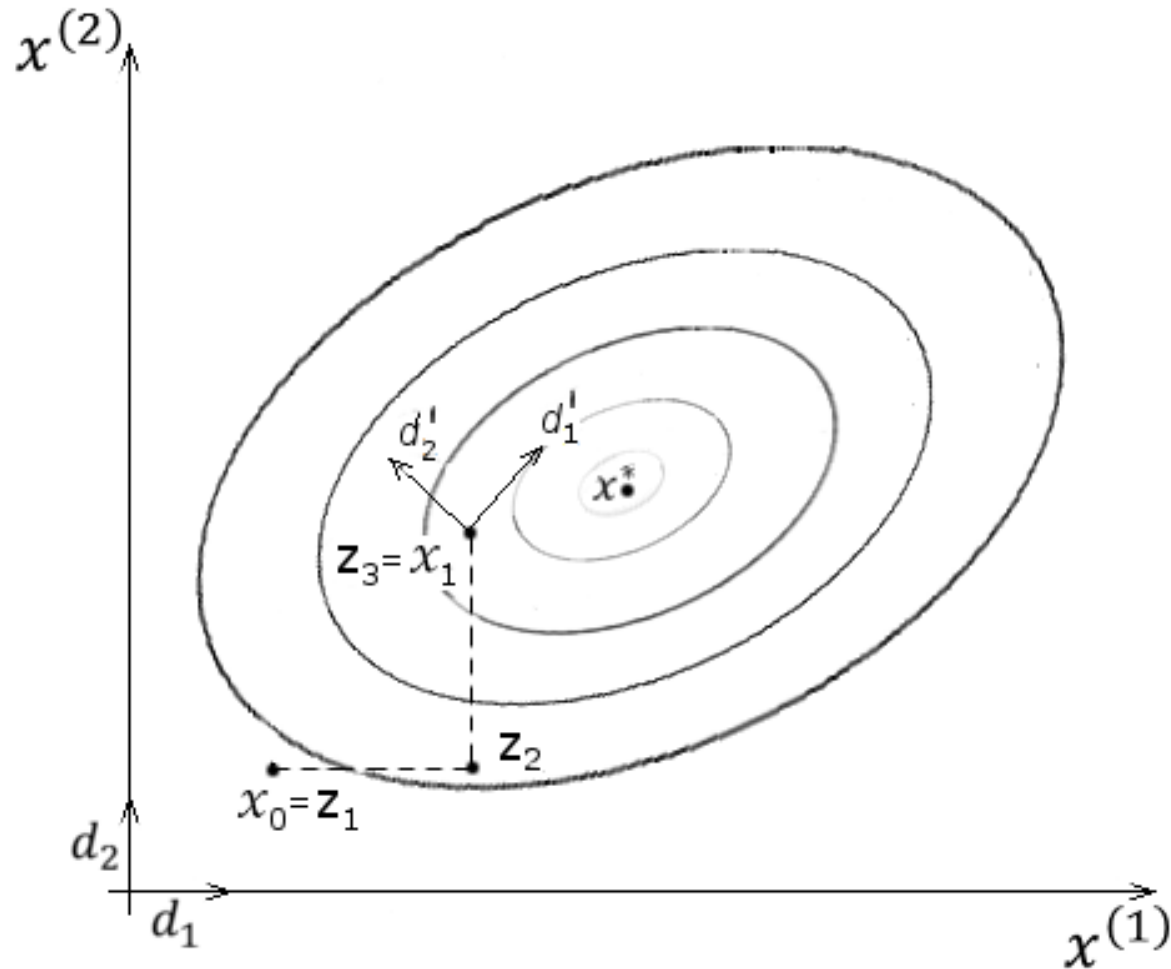
$\alpha > 1$ – współczynnik
korekcji kroku

$\beta \in (-1, 0)$ - współczynnika
korekcji kroku

$$\tau_s := \tau_s \alpha$$

$$\tau_s := \tau_s \beta$$

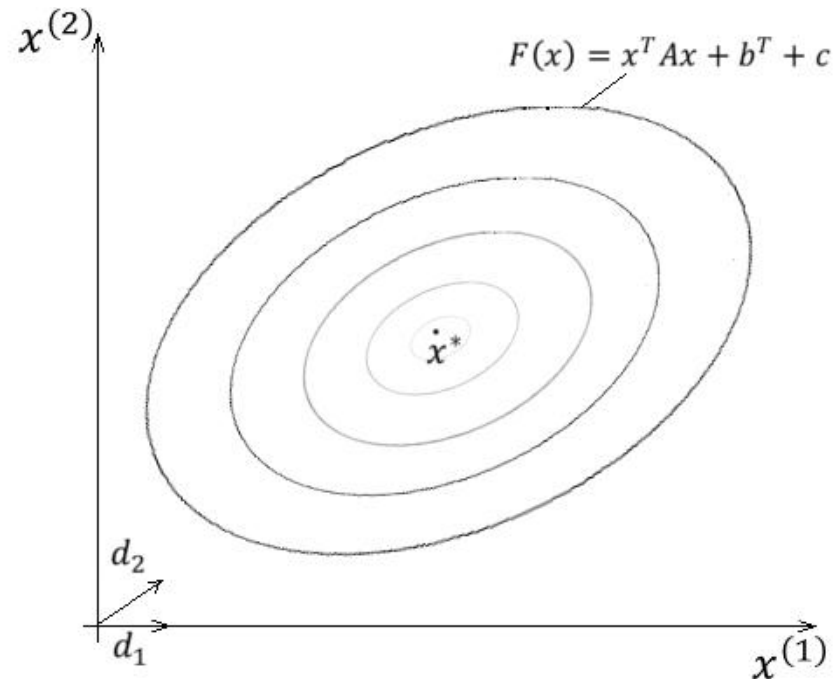
Metoda Rozenbrocka – z krokiem optymalnym



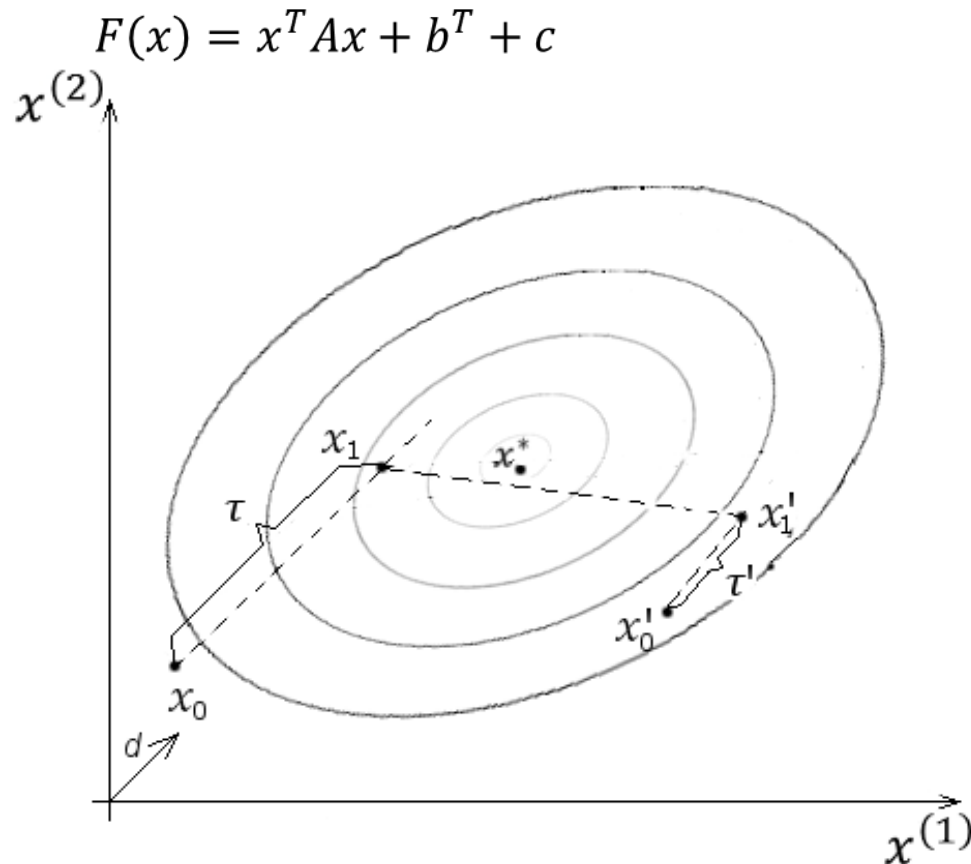
Metoda Powella – wektory sprzężone

$d_1, d_2, \dots, d_s$ - sprzężone według macierzy A , symetrycznej i dodatnio określonej

$$d_i^T A d_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$



Metoda Powella



$$x_1 = x_0 + \tau^* d$$

τ^* - min w kierunku d z x_0

$$x_1' = x_1 + \tau'^* d'$$

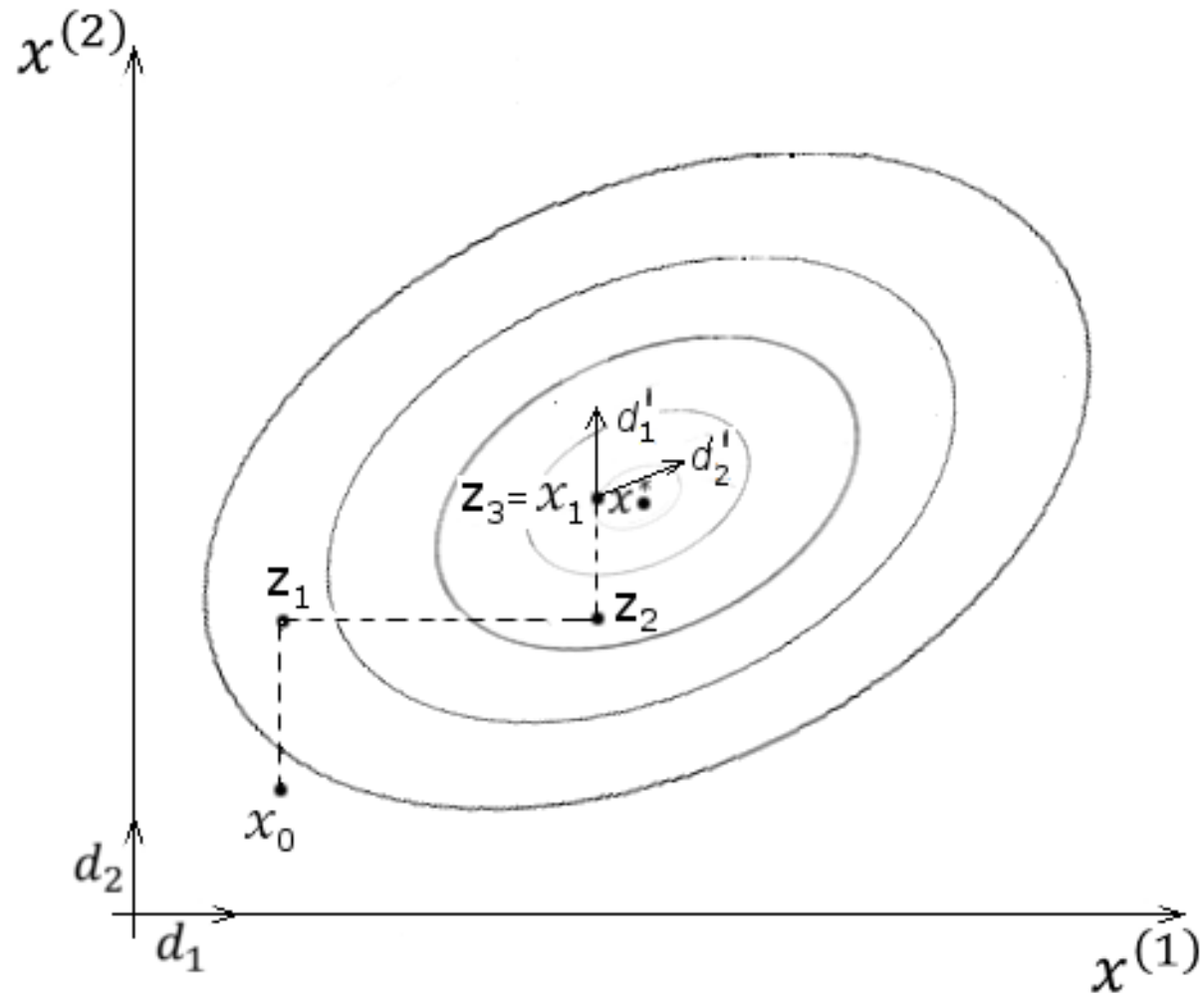
τ'^* - min w kierunku d' z x_1

$$d^T A d' = 0$$

d, d' - sprzężone według A

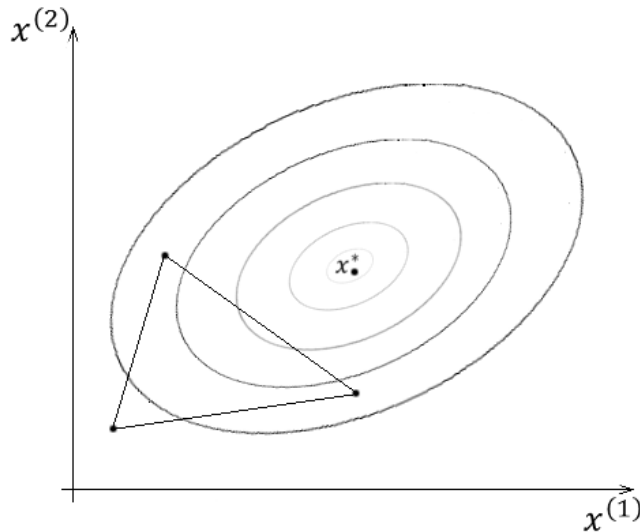
$$d' = \frac{x_1' - x_1}{\|x_1' - x_1\|}$$

Metoda Powella



Metoda Nelder-Meada (simplex)

$x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{S+1}$ - simplex w przestrzeni s -wymiarowej



$$x_H \rightarrow F(x_H) = \max_{1 \leq s \leq S+1} F(x_s)$$

$$x_L \rightarrow F(x_L) = \min_{1 \leq s \leq S+1} F(x_s)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \sum_{s=1, s \neq H}^{S+1} x_s$$

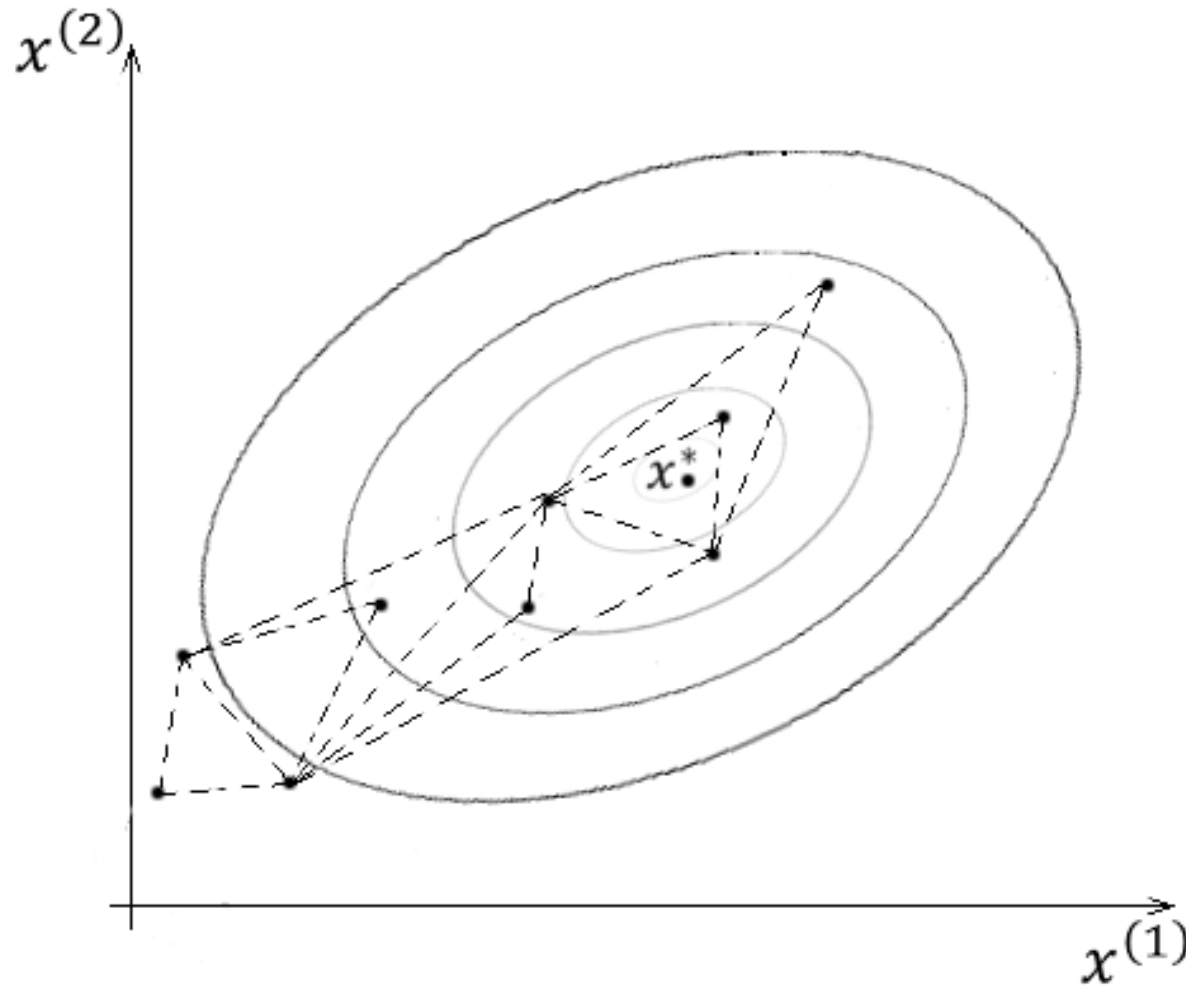
Generowanie simplexu początkowego

$$x_0, c \quad a = \frac{c}{S\sqrt{2}} (\sqrt{S+1} + \sqrt{2} - 1)$$

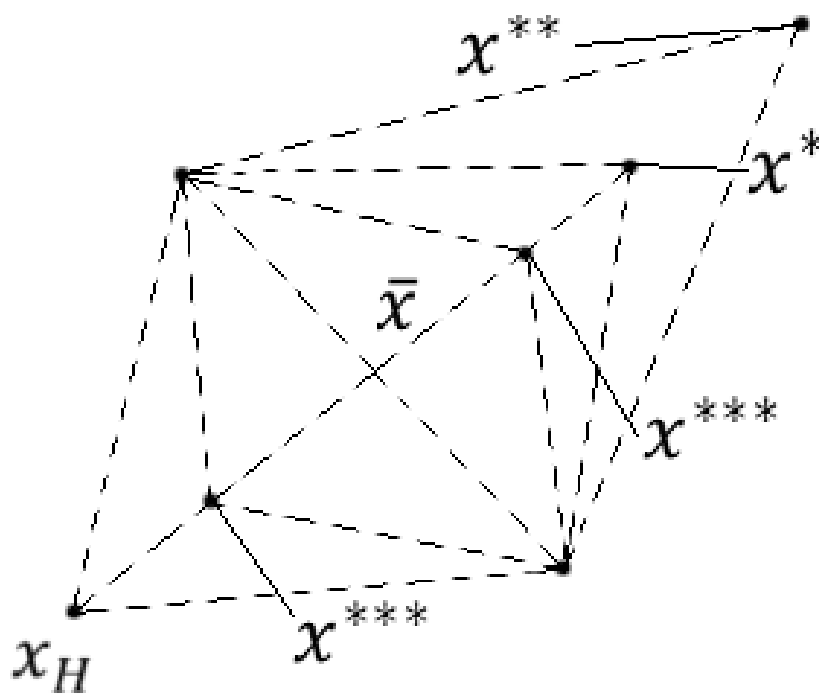
$$b = \frac{c}{S\sqrt{2}} (\sqrt{S+1} - 1)$$

$$d_j = [\quad] \quad x_i = x_0 + d_j, x_{S+1} = x_0$$

Metoda Nelder-Meada (simplex)



Metoda Neldera-Meada



Odbicie

$$x^* = \bar{x} + \alpha(\bar{x} - x_H)$$

α – współczynnik odbicia

Jeśli $\alpha > 0$

$$F(x^*) < F(x_L)$$

Ekspansja

$$x^{**} = \bar{x} + \gamma(x^* - \bar{x}) \quad \gamma > 1$$

γ – współczynnik ekspansji

Kontrakcja

Jeśli $F(x^*) > F(x_H)$

$$x^{***} = \bar{x} + \beta(x_H - \bar{x})$$

Jeśli $F(x^*) > \max_{\substack{1 \leq s \leq S+1 \\ s \neq H}} F(x_s)$

$$x^{***} = \bar{x} + \beta(x^* - \bar{x}) \quad \beta \in (0, 1)$$

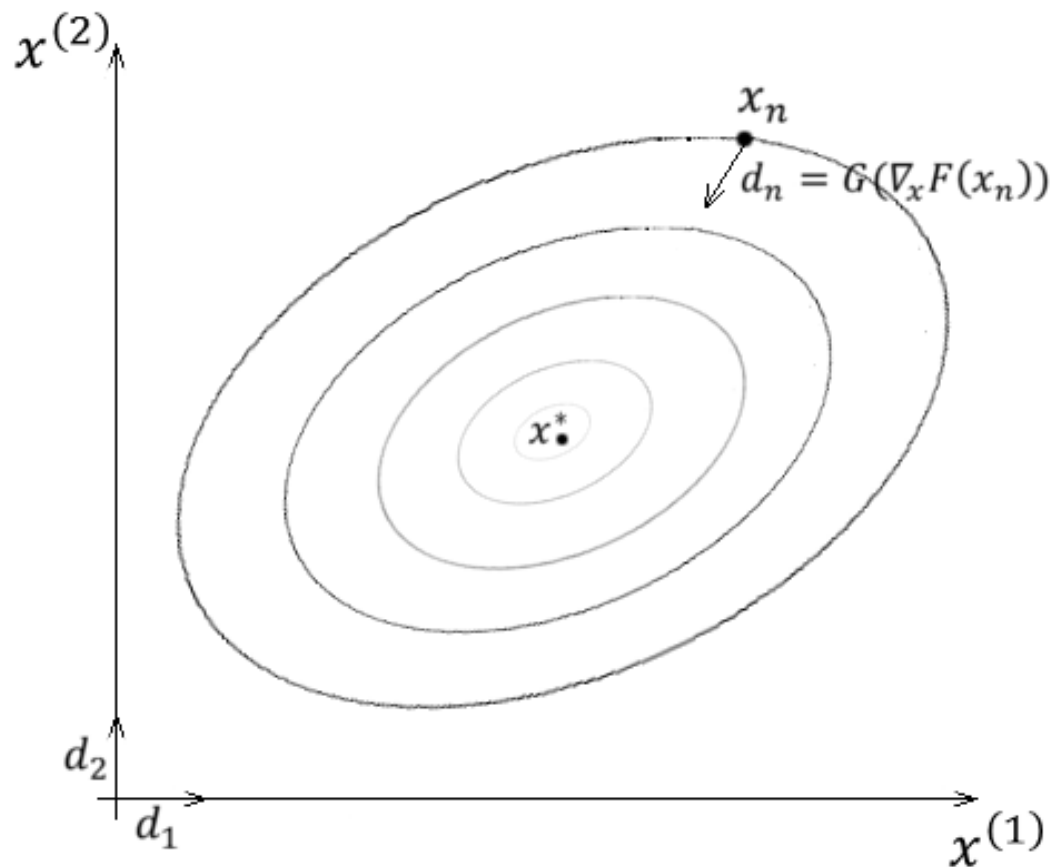
β – współczynnik kontrakcji

Gradientowe metody optymalizacji

∞ Gradientowe metody optymalizacji

- Gradientu prostego
- Najszybszego spadku
- Newtona
- Gradientu sprzężonego
- Zmiennej metryki

Metody gradientowe



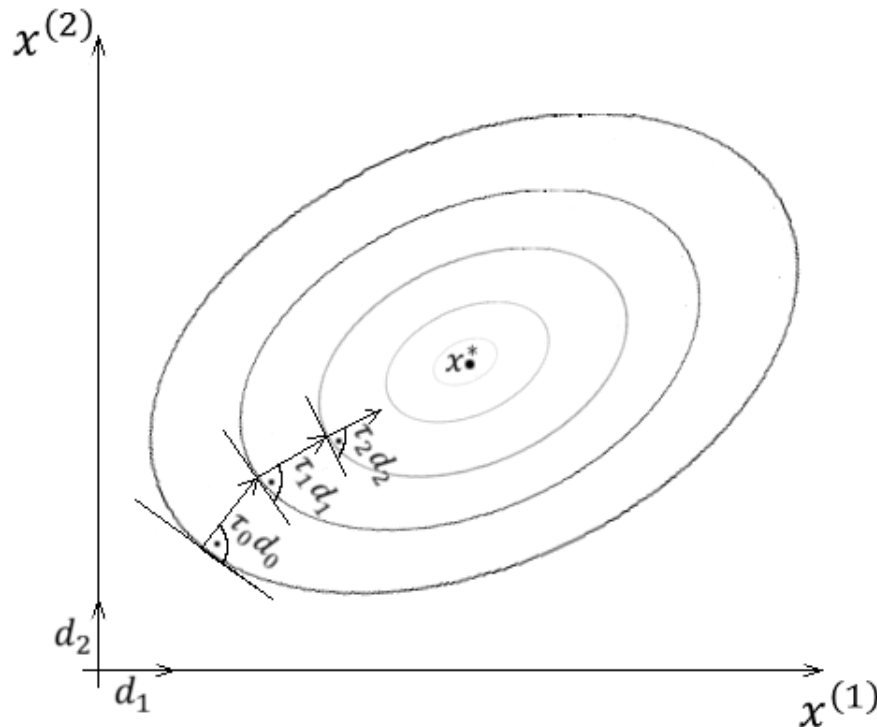
$$x_{n+1} = x_n + \tau_n d_n$$
$$d_n = G(\nabla_x F(x_n))$$

τ_n - krok procedury

Metoda gradientu prostego

$$x_{n+1} = x_n + \tau_n d_n$$

$$d_n = -\nabla_x F(x_n); \tau_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau, \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = \infty$$

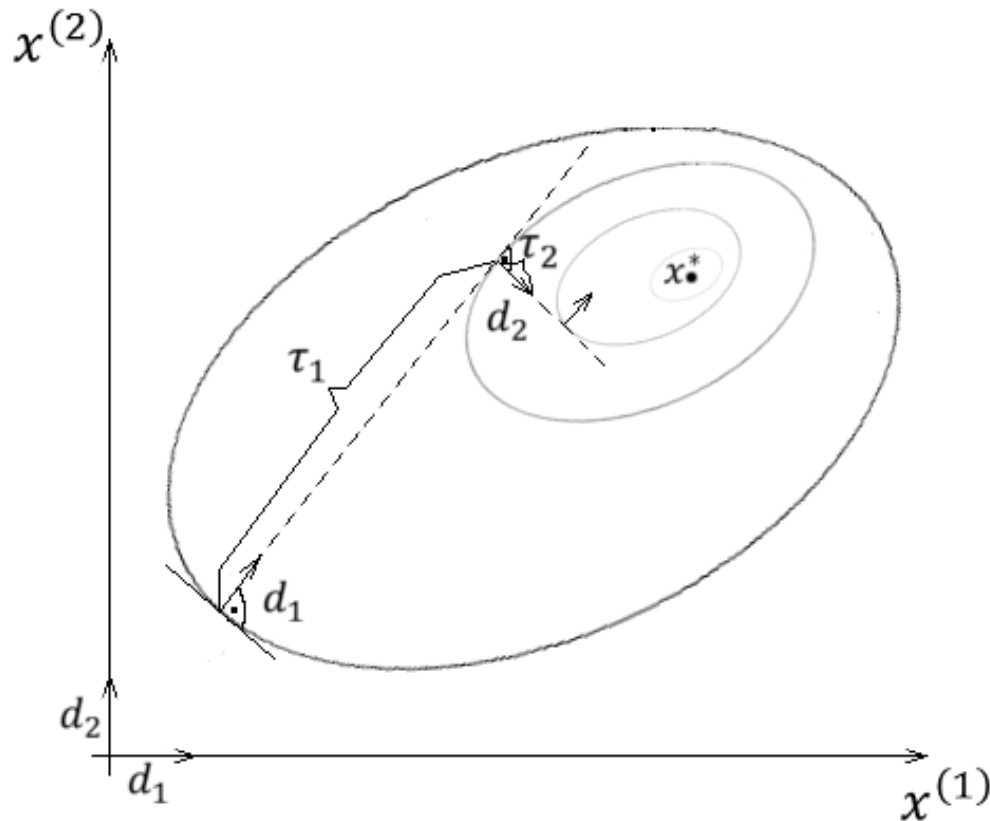


$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|\tau_n d_n\| < \varepsilon$$

Metoda najszybszego spadku

$$x_{n+1} = x_n + \tau_n d_n$$

$d_n = -\nabla_x F(x_n)$, τ_n - minimum w kierunku d_n



$$\|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$$

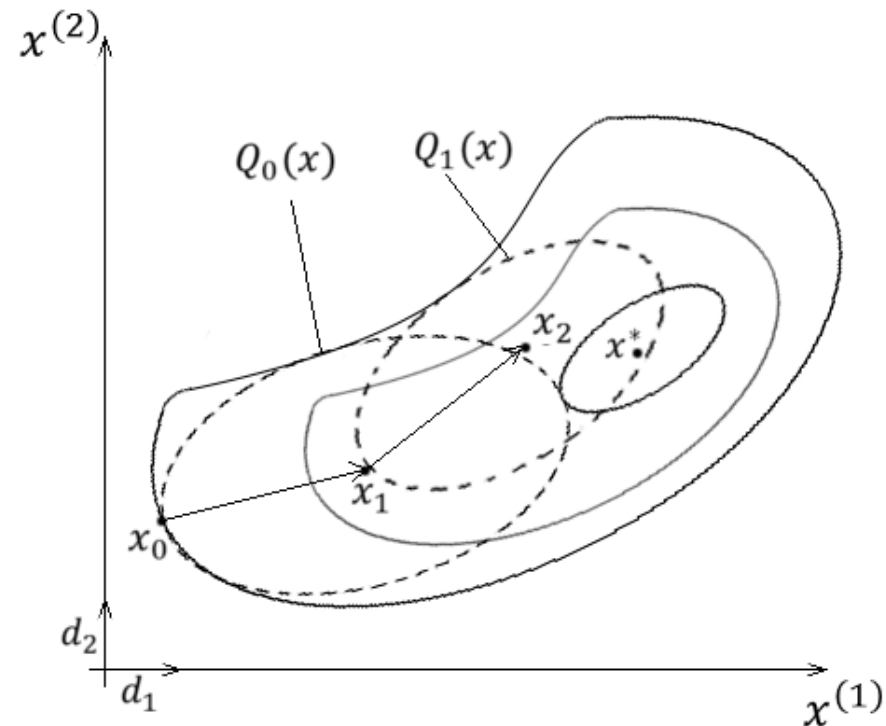
Metoda Newtona

$$F(x) = \underbrace{F(x_0) + (x - x_0)^T \nabla_x F(x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T H(x_0) (x - x_0)}_{Q(x)} + o_3(\|x - x_0\|)$$

$$\nabla_x Q(x) = \nabla_x F(x_0) + H(x_0)(x^* - x_0) = 0_S$$

$$x^* = x_0 - H^{-1}(x_0) \nabla_x F(x_0)$$

$$x_{n+1} = x_n - H^{-1}(x_n) \nabla_x F(x_n)$$



Metoda Fletchera-Reevesa (gradientu sprzężonego)

Krok 0: $z_1 = x_0$, $s = 1$, $d_1 := -\nabla_x F(z_1)$

Krok 1: $z_{s+1} := z_s + \tau_s d_s$

$\tau_s \rightarrow$ minimum w kierunku d_s

Jeśli $\|\tau_s d_s\| < \varepsilon$ (STOP)

w przeciwnym razie idź do kroku 2

Krok 2: $d_{s+1} := -\nabla_x F(z_{s+1}) + \frac{\|\nabla_x F(z_{s+1})\|}{\|\nabla_x F(z_s)\|} d_s$

$s := s + 1$, idź do kroku 1

$d_1, d_2, \dots, d_s$ - kierunki sprzężone dla formy kwadratowej

Metoda zmiennej metryki

Krok 0: $z_1 = x_0$, $d_1 = -D_1 \nabla_x F(z_1)$, $D_1 = I$, $s=1$

Krok 1: $z_{s+1} = z_s + \tau_s d_s$ gdzie τ_s - minimum w kierunku d_s

Jeśli $\|\tau_s d_s\| < \varepsilon$ (STOP)

w przeciwnym razie idź do kroku 2.

Krok 2: $d_{s+1} = -D_{s+1} \nabla_x F(z_{s+1})$

$D_{s+1} = D_s + \frac{p_s p_s^T}{p_s^T q_s} - \frac{D_s q_s q_s^T D_s}{q_s^T D_s q_s}$, gdzie

$p_s = \tau_s d_s$, $q_s = \nabla_x F(z_{s+1}) - \nabla_x F(z_s)$

$s := s+1$ idź do kroku 1.

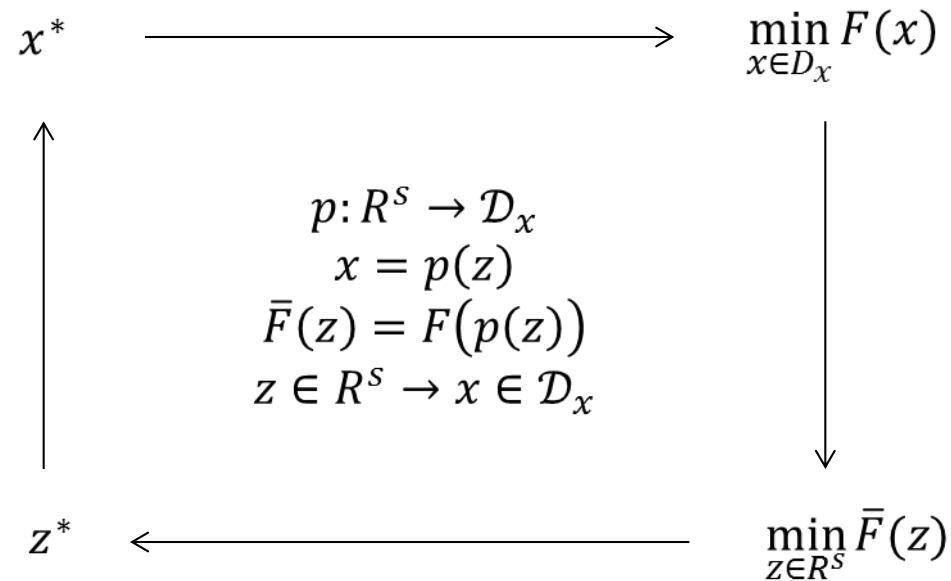
$D_{s+1} \approx H^{-1}(x_{s+1})$

Metody optymalizacji z ograniczeniami

∞ Metody optymalizacji z ograniczeniami

- Transformacji zmiennych
- Funkcji kary
 - Kary zewnętrznej (kary)
 - Kary wewnętrzne (bariery)
- Metoda kompleks
- Poszukiwania losowe

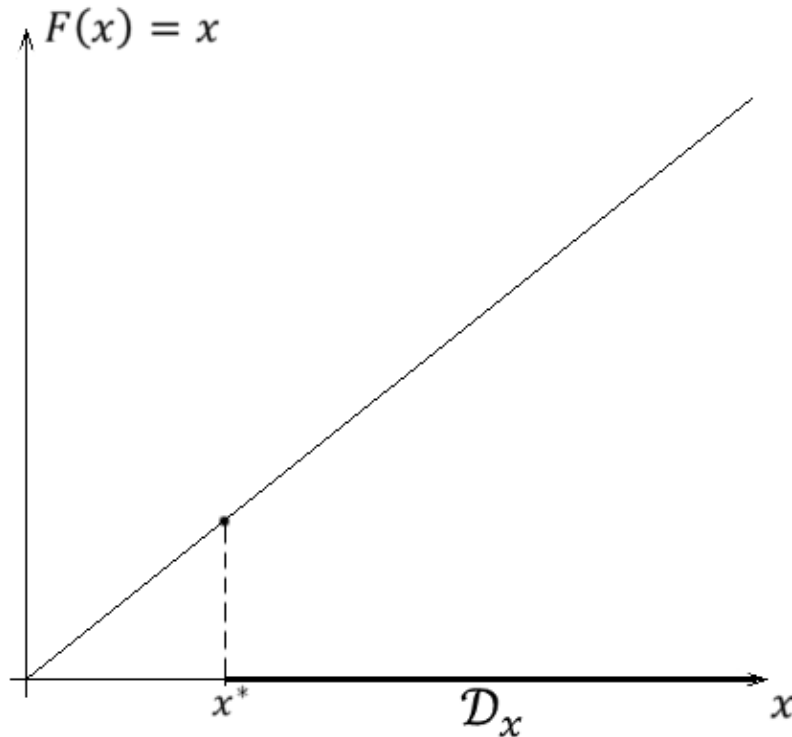
Metoda transformacji zmiennych



Przykład

$$F(x) = x$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid x \geq 1\}$$



$$x^* \rightarrow \min_{x \geq 1} x$$

$$x = z^2 + 1 = p(z)$$

$$z \in \mathbb{R} \rightarrow x \in [1, \infty)$$

$$\bar{F}(z) = z^2 + 1$$

$$z^* \rightarrow \min_{z \in \mathbb{R}} \bar{F}(z)$$

$$z^* \rightarrow \min_{z \in \mathbb{R}} (z^2 + 1)$$

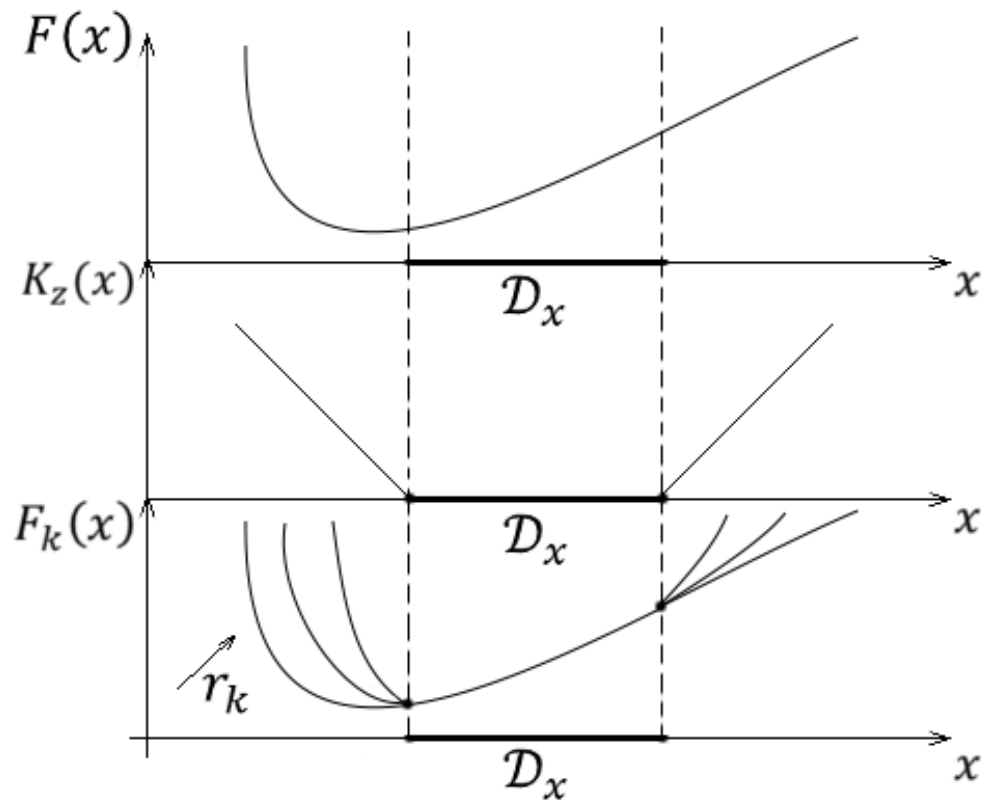
$$(z^2 + 1)' = 2z = 0$$

$$z^* = 0$$

$$x^* = p(z^*) = (z^*)^2 + 1 = 1$$

Metody funkcji kary

Kary zewnętrzne (kary)



$$r_k > 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$$

Przykłady funkcji kary zewnętrznej

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^s, \varphi_l(x) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad \psi_m(x) \leq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M\}$$

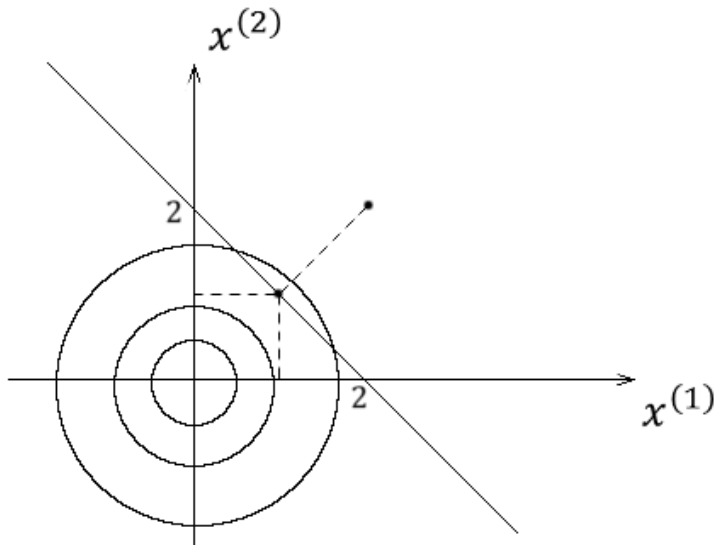
$$\varphi_l(x) \rightarrow K_{lZ}(x) = (\varphi_l(x))^2, \quad l = 1, 2, \dots, L$$

$$\psi_m(x) \rightarrow K_{mZ}(x) = (\max\{0, \psi_m(x)\})^2, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$K_Z(x) = \sum_{l=1}^L r_l (\varphi_l(x))^2 + \sum_{m=1}^M \rho_m \max\{0, \varphi_m(x)\}$$

Przykład

$$F(x) = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2$$
$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^2, x^{(1)} + x^{(2)} - 2 = 0\}$$



$$F_k(x) = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 + r_k(x^{(1)} + x^{(2)} - 2)^2$$

$$F'_k(x) = 0$$

$$2x^{(1)} + 2r_k(x^{(1)} + x^{(2)} - 2) = 0$$

$$2x^{(2)} + 2r_k(x^{(1)} + x^{(2)} - 2) = 0$$

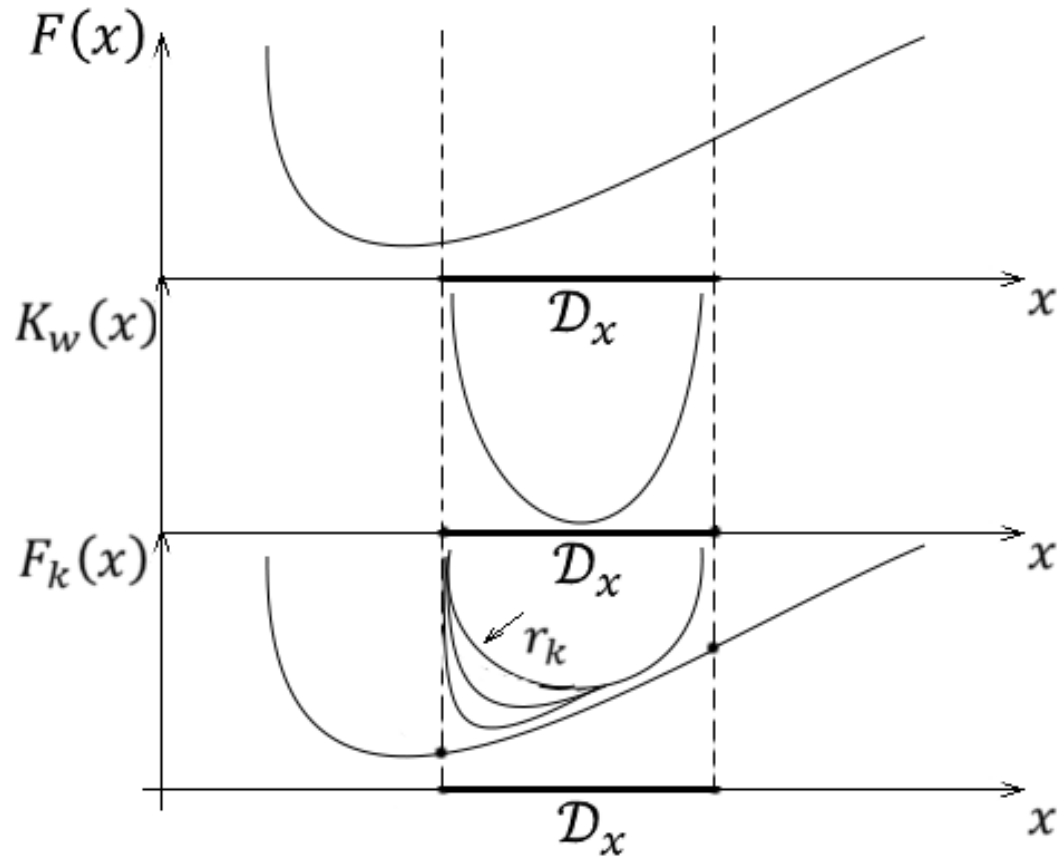
$$x^{(1)} = x^{(2)}$$

$$+2r_k(x^{(1)} + x^{(2)} - 2) = 0$$

$$x^{(1)} = x^{(2)} = \frac{2r_k}{2r_k + 1}$$

$$x^{(1)} = x^{(2)} = \lim_{r_k \rightarrow \infty} \frac{2r_k}{2r_k + 1} = 1, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kary wewnętrzne (bariery)



$$r_k > 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$$

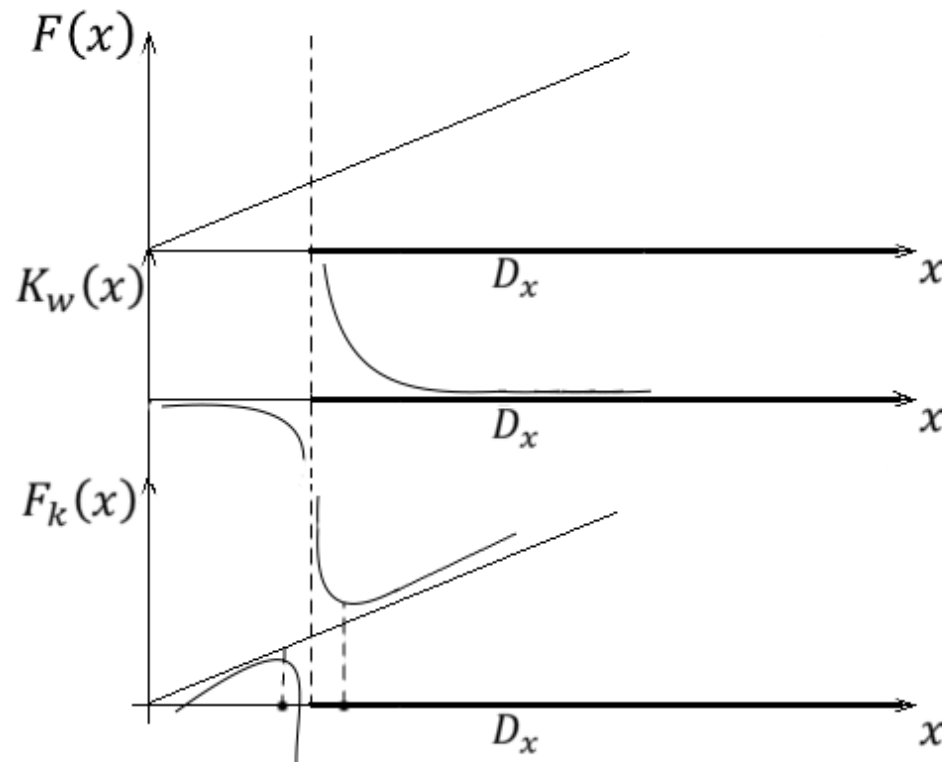
Kara wewnętrzna (metoda Carrola)

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^s, \quad \psi_m(x) \leq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M\}$$

$$K_w(x) = \sum_{m=1}^M \frac{-r_m}{\psi_m(x)}, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Przykład

$$F(x) = x; \quad \mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^1, x \geq 1\} \equiv \{x \in \mathbb{R}^1, 1 - x \leq 0\}$$



$$K_w(x) = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$$

$$F_k(x) = x + r_k \frac{1}{x-1}$$

$$F'(x) = 1 + \frac{-r_k}{(x-1)^2} = 0$$

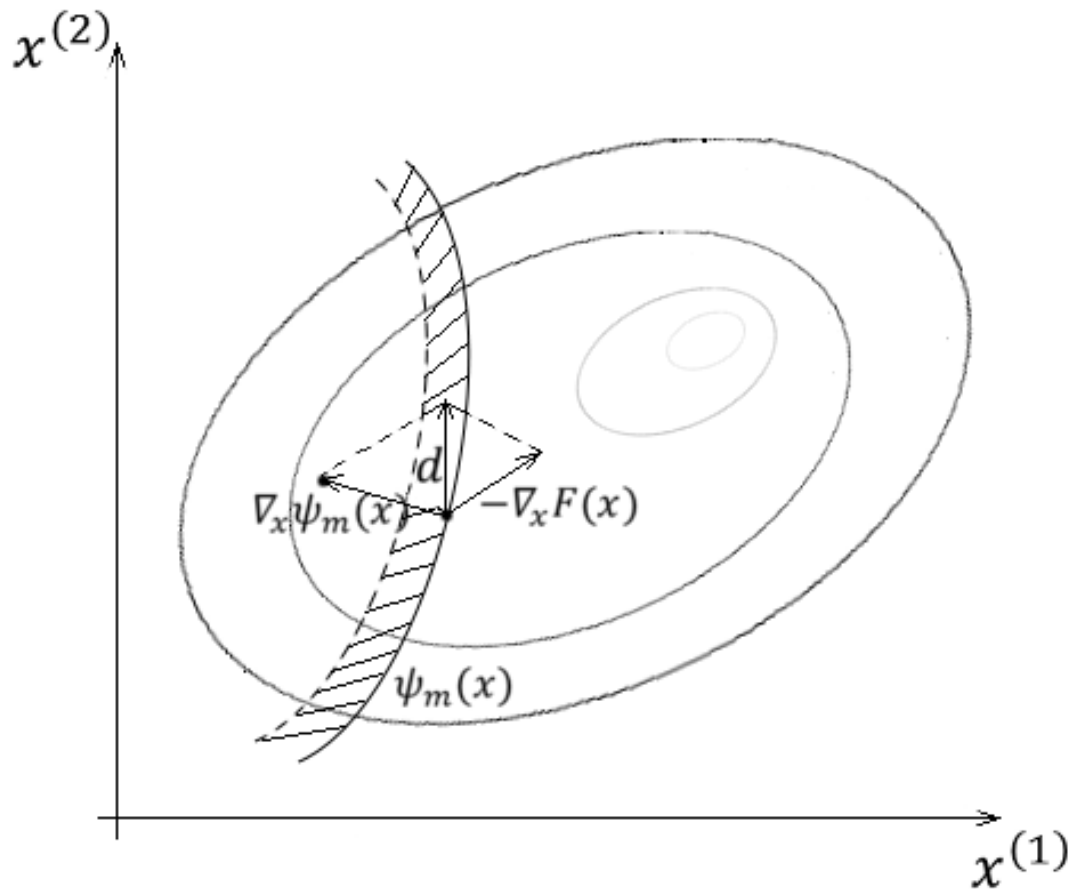
$$x_k = 1 \pm \sqrt{r_k}$$

$$x_k = 1 - \sqrt{r_k} \notin \mathcal{D}_x$$

$$x_k = 1 + \sqrt{r_k} \in \mathcal{D}_x$$

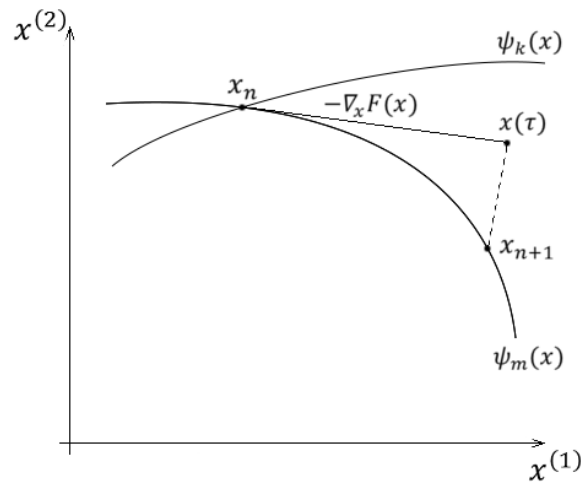
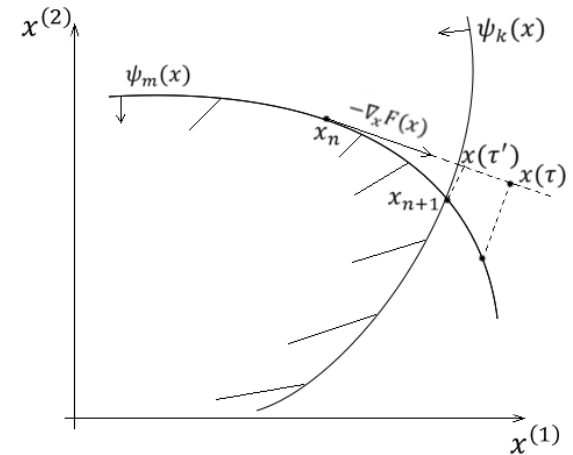
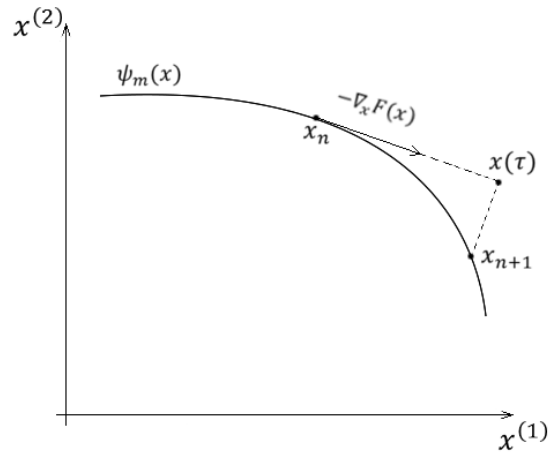
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

Metoda modyfikacji kierunków



$$d = \frac{\nabla_x \psi_m(x)}{\|\nabla_x \psi_m(x)\|} - \frac{\nabla_x F(x)}{\|\nabla_x F(x)\|}$$
$$x: \psi(x) - \delta \leq 0$$

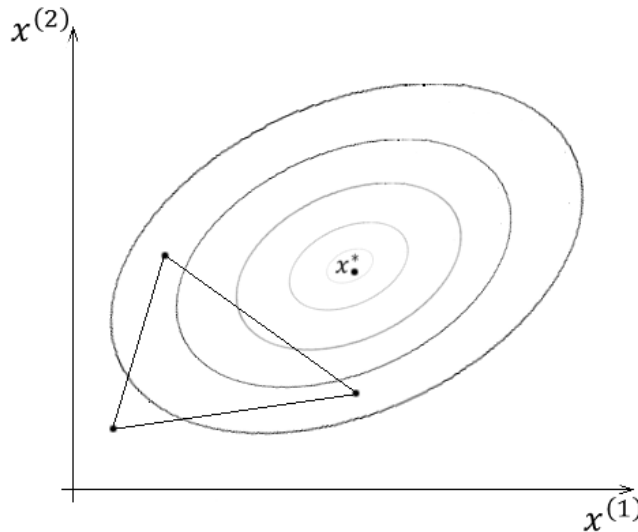
Metoda rzutowania - Rozena



Metoda Kompleks (Boxa)

Metoda Nelder-Meada (simplex)

$x_1 x_2 \dots x_K$ - kompleks w przestrzeni s -wymiarowej $K \geq S + 1$



$$x_H \rightarrow F(x_H) = \max_{1 \leq s \leq K} F(x_s)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \sum_{s=1, s \neq H}^K x_s$$

$$x^* = (1 + \alpha)\bar{x} - x_H$$

$$D_x: l_s \leq x^{(s)} \leq u_s \quad s = 1, 2, \dots, S$$

$$l_m \leq x_m(x) \leq u_m \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$x_k = l_k + r_k |u_k - l_k|$, r_k - liczba losowa $\in [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots, K$

Jeśli x_k nie należy do D_x to przesun punkt w kierunku centroidu punktów zaakceptowanych

Poszukiwania losowe - Down Hill

methods

Dane: $F(x), x_0, D_x, N$

Krok 0: $n=0, x^* = x_n$

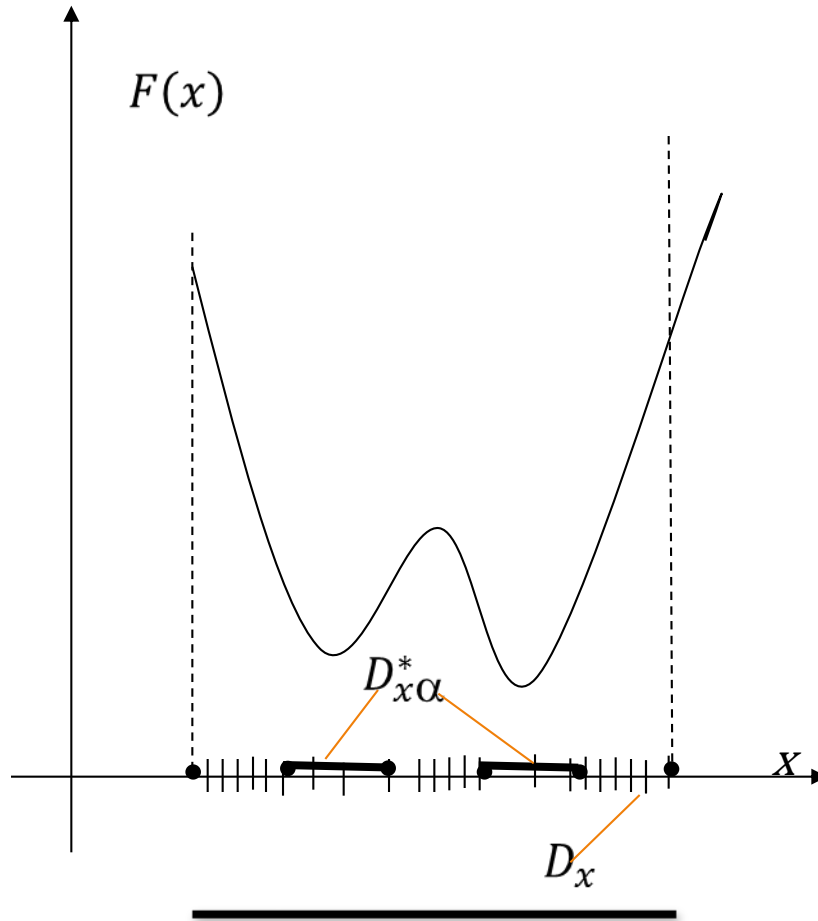
Krok 1: Generujemy punkt x_{n+1} w zbiorze D_x wg rozkładu jednostajnego

Krok 2: Jeżeli $F(x_{n+1}) < F(x^*)$ podstaw $x^* = x_{n+1}$

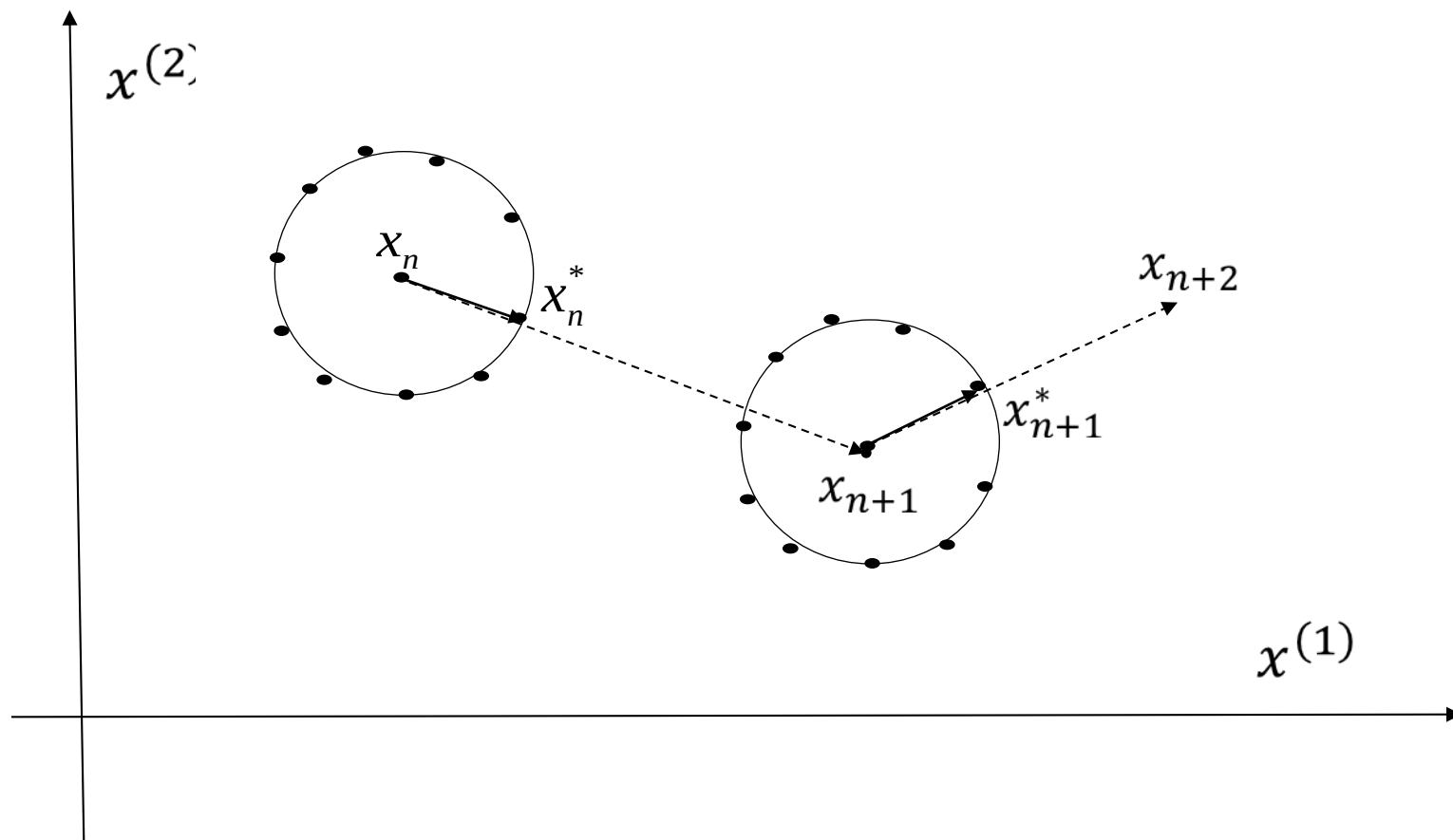
Krok 3: Jeżeli $n < N$ podstaw $n = n + 1$ idź do kroku 1

Krok 4: $x^* = x_N$

Poszukiwania losowe



$$f(x) = \frac{F(x)}{\int_{D_x} F(x) dx}$$



Metody optymalizacji inspirowane naturą

- są często metaheurystykami lub heurystykami
- wykorzystują analogię do procesów zachodzących w naturze w procesie przeszukiwania przestrzeni rozwiązań między innymi:
 - ⌘ błędzenie losowe (*random walk*)
 - ⌘ symulowane wyżarzanie (*simulated annealing*)
 - ⌘ **algorytmy genetyczne**
 - ⌘ strategie ewolucyjne
 - ⌘ **algorytmy mrówkowy (*ant colony optimization*)**
 - ⌘ **algorytm pszczele (*artificial bee colony*)**
 - ⌘ **algorytm roju cząsteczek (*particle swarm optimization*)**
 - ⌘ **algorytm świetlika (*firefly algorithm*)**
 - ⌘ algorytm kukułki (*cuckoo search*)
 - ⌘ algorytm nietoperza (*bat algorithms*)
 - ⌘ algorytm zapylania kwiatów (*flower pollination algorithms*)

Zadanie programowania liniowego

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^s, \varphi_l(x) = 0, l = 1, 2, \dots, L, \psi_m(x) \leq 0, m = 1, 2, \dots, M\}$$

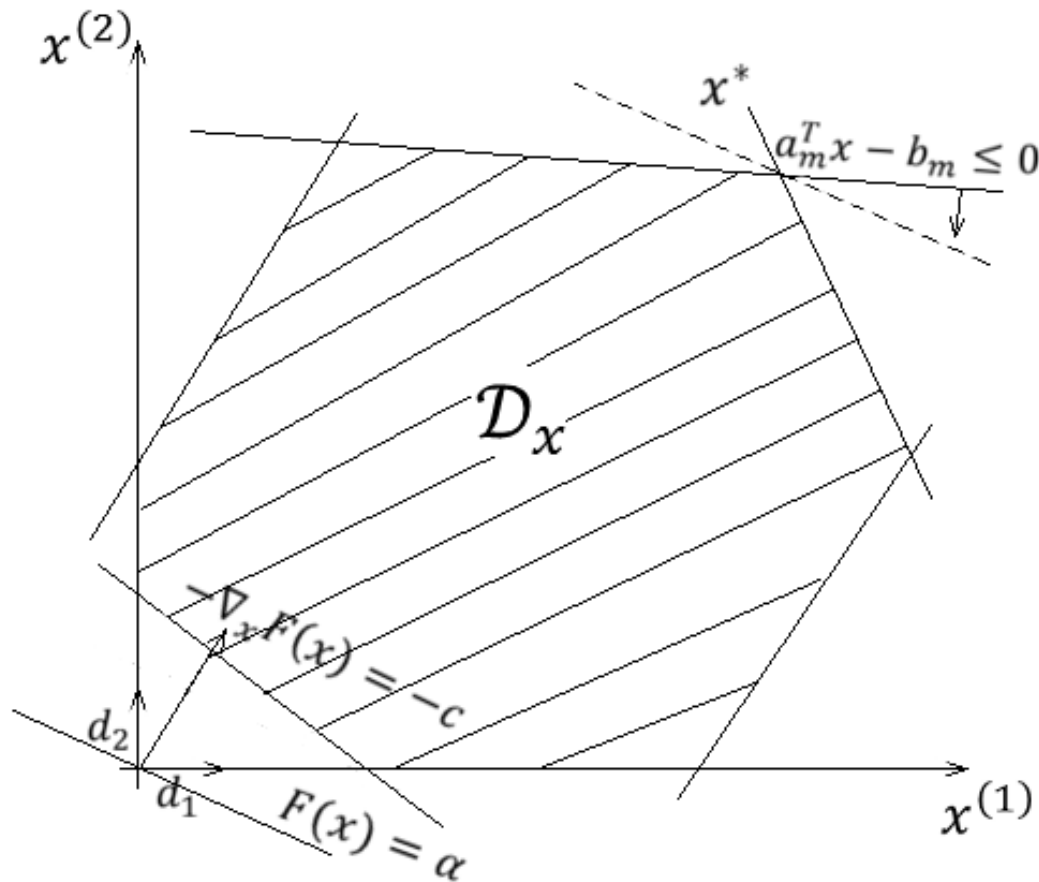
$$F(x) = c^T x = \sum_{s=1}^S c_s x^{(s)}$$

$$\varphi_l(x) = a_l^T x - b_l = \sum_{s=1}^S a_{ls} x^{(s)} - b_l = 0 \quad l = 1, 2, \dots, L$$

$$\psi_m(x) = a_m^T x - b_m \leq 0 = \sum_{s=1}^S a_{ms} x^{(s)} - b_m \leq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

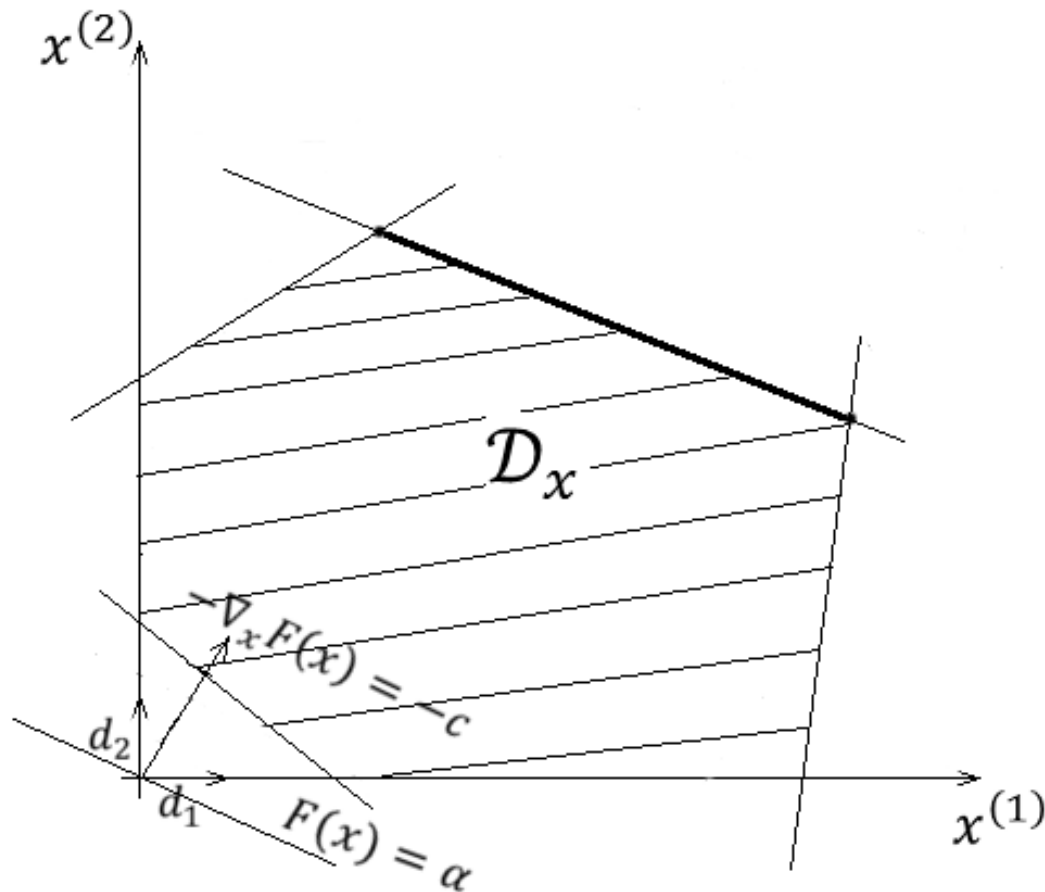
$$x^{(s)} \geq 0 \quad s = 1, 2, \dots, S$$

Interpretacja graficzna



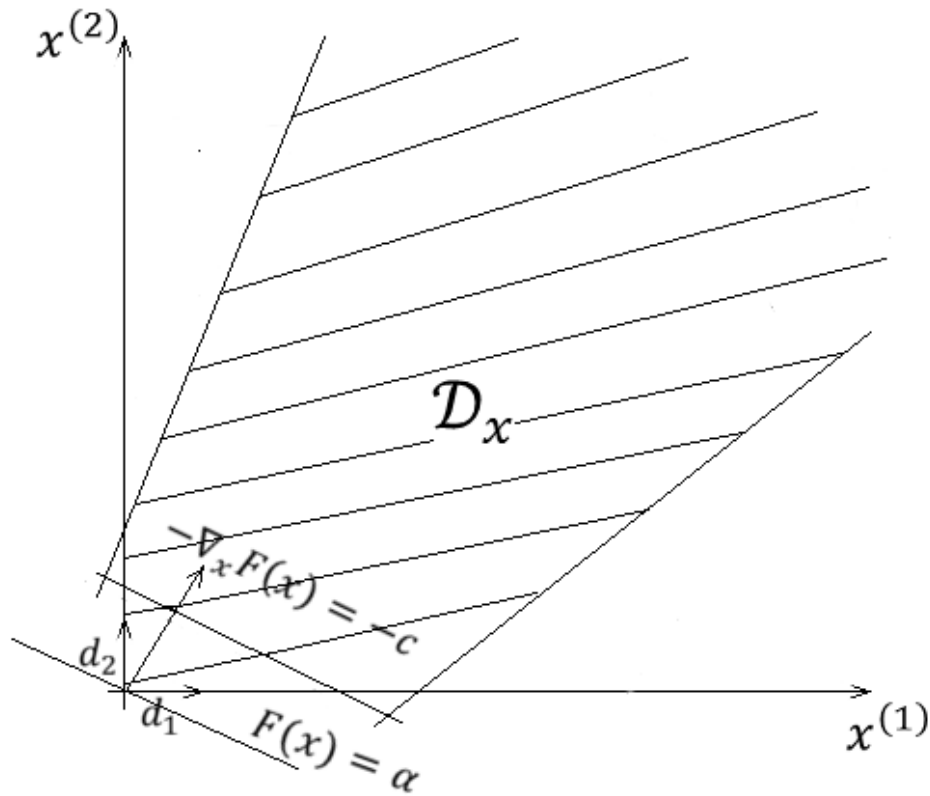
1. Rozwiązanie leży w wierzchołku

Interpretacja graficzna



2. Rozwiązanie leży na odcinku

Interpretacja graficzna



3. Rozwiązanie nieograniczone

Postać kanoniczna

$$F(x) = c^T x$$

$$\text{A: } \mathcal{D}_X = \{x \in R^s, Ax - b = 0_L, x \geq 0_S\}$$

lub

$$\text{B: } \mathcal{D}_x = \{x \in R^s, Ax - b \leq 0_L, x \geq 0_S\}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_S \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_L \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(S)} \end{bmatrix}, \quad A_{S \times L} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{L1} & \cdots & a_{LS} \end{bmatrix}$$

Metoda simplex

1. Wyznaczenie rozwiązania początkowego
2. Kryterium zbieżności – zatrzymanie procedury
3. Przechodzenie z jednej bazy do drugiej
4. Postępowanie przy rozwiązaniach zdegenerowanych

Algorytm simplex

1. Wyznaczamy początkową bazę dopuszczalną
2. Badamy czy $c - c_B B^{-1} A \geq 0_S$. Jeżeli tak to x_B - rozwiązanie problem $x = [x_B \ 0]$
3. Wstawiamy do bazy k - takie, że $c_k - z_k = \min_{1 \leq s \leq S} (c_s - z_s)$
4. Badamy, czy $h_k \leq 0$, jeśli tak - funkcja nieograniczona
5. Wyrzucamy z bazy l - takie, że

$$\frac{h_{l0}}{h_{lk}} = \min_{1 \leq s \leq S} \left\{ \frac{h_{s0}}{h_{sk}}, h_{sk} > 0 \right\}$$

6. $I_B := I_B \setminus \{l\} \cup \{k\}$
 $I_B = \{j \in \{1, 2, \dots, S\} \mid x^{(j)} \text{ jest elementem bazy} \}$
7. Jeżeli wskaźnik optymalności zmiennej nie bazowej jest równy 0 to istnieje kolejne rozwiązanie (rozwiązania alternatywne)

Algorytm simplex

			c_1	$\dots$	c_k	$\dots$	c_S			
Zmienn e bazowe	c_B	h_0	h_1	$\dots$	h_k	$\dots$	h_S		$\frac{h_{s0}}{h_{sk}}$	$h_{sk} \geq 0$
x_{j1}	c_{j1}	h_{10}	h_{11}	$\dots$	h_{1k}	$\dots$	h_{1S}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_{jl}	c_{jl}	h_{l0}	h_{l1}	$\dots$	h_{lk}	$\dots$	h_{lS}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_{jL}	c_{jL}	h_{L0}	h_{L1}	$\dots$	h_{Lk}	$\dots$	h_{LS}			
			$c_1 - z_1$	$\dots$	$c_k - z_k$	$\dots$	$c_S - z_S$			

$$z_k = \sum_{s \in I_B} c_s h_{sk}$$

$$h'_{ls} := \frac{h_{ls}}{h_{lk}}; \quad h'_{is} = h_{is} - \frac{h_{ik} h_{ls}}{h_{lk}}$$

$$s = 1, 2, \dots, S \quad i = 0, 1, \dots, S$$

$$s \in I_B \setminus \{l\}$$

Programowanie kwadratowe

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

∞

$$F(x) = x^T D x + c^T x$$

$$D_x = \{x \in R^s, Ax = b, x \geq 0\}$$

Zadanie programowania ilorazowego

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^S : \phi(x) = 0_L, \psi(x) \leq 0_M, x \geq 0_S\}$$

Funkcja celu: $F(x) = \frac{a^T x + b}{c^T x + d}$

$$a \in \mathbb{R}^S, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^S, d \in \mathbb{R}$$

Ograniczenia:

$$\varphi_l(x) = p_l^T x - \alpha_l = 0, \\ l = 1, 2, \dots, L$$

$$p_l = \begin{bmatrix} p_l^{(1)} \\ p_l^{(2)} \\ \vdots \\ p_l^{(S)} \end{bmatrix}$$

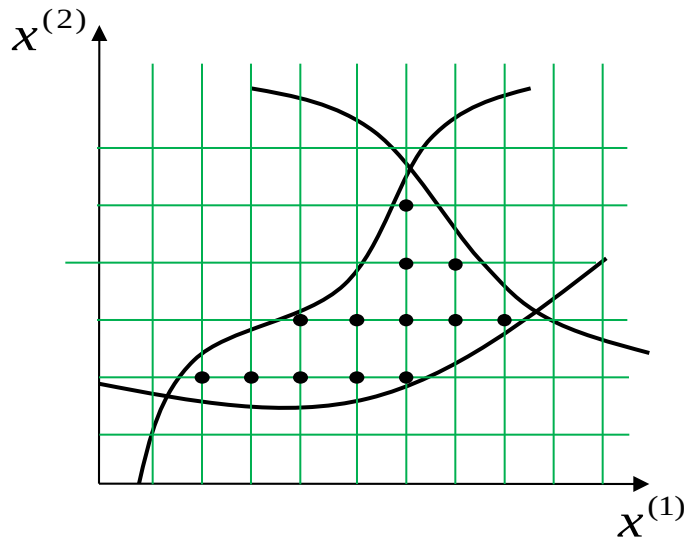
$$\psi_m(x) = q_m^T x - \beta_m \leq 0, \\ m = 1, 2, \dots, M$$

$$q_l = \begin{bmatrix} q_m^{(1)} \\ q_m^{(2)} \\ \vdots \\ q_m^{(S)} \end{bmatrix}$$

Programowanie całkowitoliczbowe

Programowanie całkowitoliczbowe

Zmienne decyzyjne: $x \in \overline{\mathcal{D}}_x = \mathcal{D}_x \cap \{x^{(s)} \in \mathcal{C}, s = 1, 2, \dots, S\}$



Inne równoważne

$x \in \overline{\mathcal{D}}_x = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ - typoszereg

$x \in \overline{\mathcal{D}}_x = \{x^{(s)} \in \{0, 1\}, s = 1, 2, \dots, S\}$ - programowanie
zero - jedynkowe (Boolowskie)

Programowanie całkowitoliczbowe

Krok 0: $\mathcal{D}_0 = \{\mathcal{D}_{xc} = \mathcal{D}_{01}\}$, $n = 0$, $J_0 = 1$

Krok 1: Wyznaczyć taki zbiór $\mathcal{D}^* \in \mathcal{D}_n$

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}^*) = \min_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_n} \mathcal{F}(\mathcal{D})$$

Krok 2: Badamy czy $\mathcal{D}^*$ jest zbiorem jednoelementowym ($\{x^*\} = \mathcal{D}^*$)

lub $x^* \sim \mathcal{F}(\mathcal{D}^*)$ tj. $\mathcal{F}(\mathcal{D}^*) = F(x^*)$ $x^* \in \mathcal{D}^*$ (oszacowanie jest całkowitoliczbowe) to x^* jest rozwiązaniem optymalnym STOP

Krok 3: $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}_{nk}$ dzielimy na M zbiorów rozłącznych

$$\mathcal{D}_{1nk} \mathcal{D}_{2nk} \dots \mathcal{D}_{Mnk} \quad \mathcal{D}_{nk} = \bigcup_{m=1}^M \mathcal{D}_{mnk}$$

Krok 4: $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}_{nk}$

$$\mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{D}_n \cup \{\mathcal{D}_{1nk}, \mathcal{D}_{2nk}, \dots, \mathcal{D}_{Mnk}\} \setminus \mathcal{D}_{nk}$$

$$\mathcal{D}_{n+1,j} = \mathcal{D}_{nj} \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

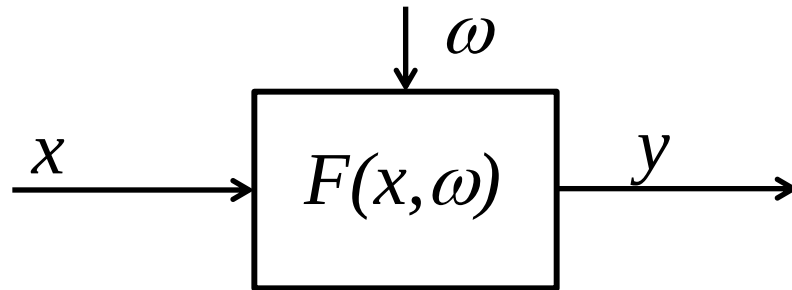
$$\mathcal{D}_{n+1,j} = \mathcal{D}_{mnk} \quad j = k-1+m, m = 1, 2, \dots, M$$

$$\mathcal{D}_{n+1,j} = \mathcal{D}_{ni} \quad j = k+M+i, i = k+1, \dots, J_n, J_{n+1} = J_n + M - 1$$

Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności

- ⌘ Niepewność opisana zmienną losową
- ⌘ Gra z naturą
- ⌘ Podejście growe

Niepewność opisana zmienną



$$F(x) = E_{\underline{\omega}}[F(x, \underline{\omega})]$$

$$\mathcal{D}_x = E_{\underline{\omega}}[\mathcal{D}_x(\underline{\omega})] =$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{R}^S; E_{\underline{\omega}}[\varphi_l(x, \underline{\omega})] = 0, l = 1, \dots, L, E_{\underline{\omega}}[\psi_m(x, \underline{\omega})] \leq 0, m = 1, \dots, M \right\}$$

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in D_x} F(x)$$

Podjmowanie decyzji w warunkach niepewności – gra z naturą

a_i - minimalna korzyść dla i – tego wiersza

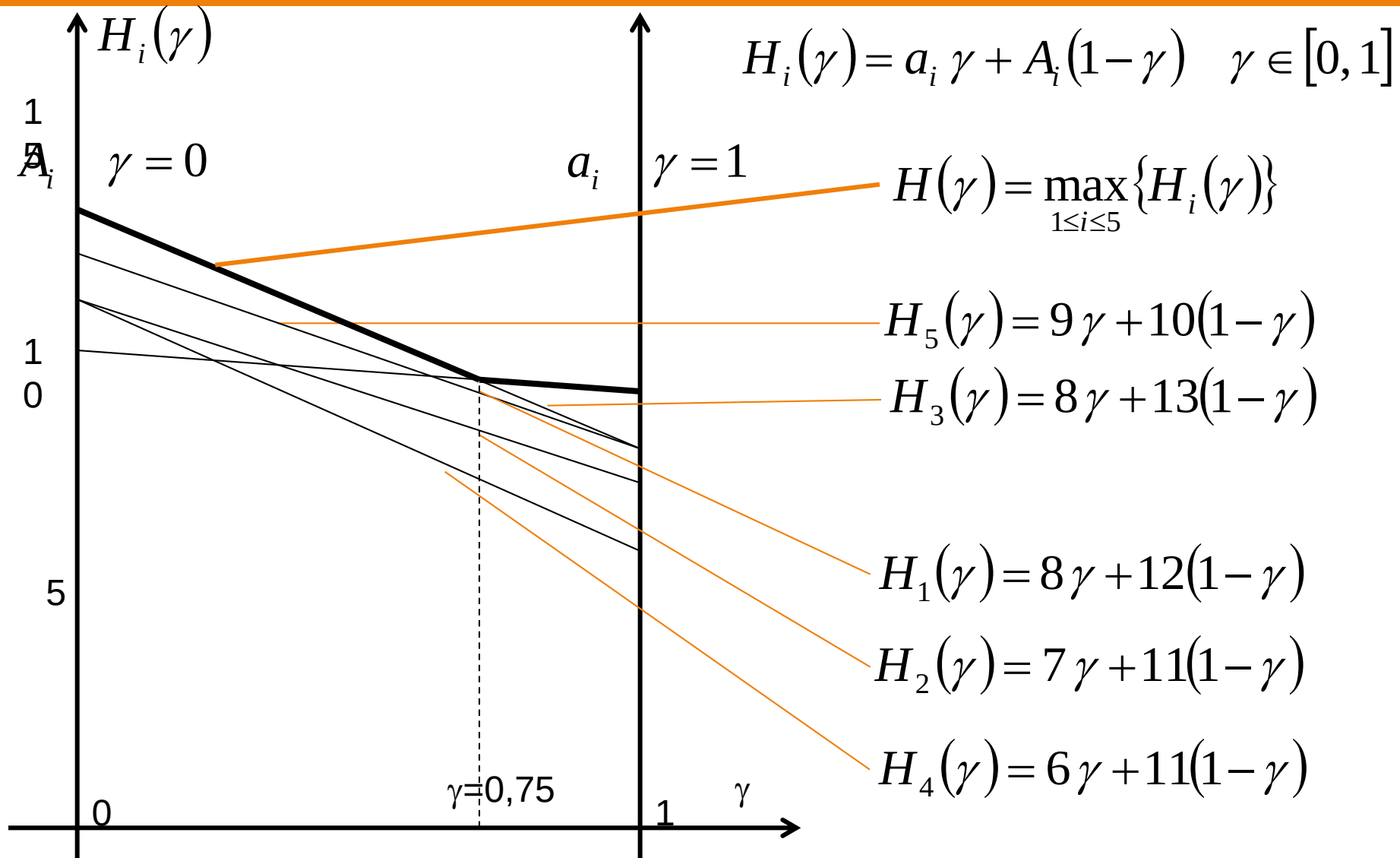
A_i - maksymalna korzyść dla i – tego wiersza

$$H_i(\gamma) = a_i \gamma + A_i(1 - \gamma) \quad \gamma \in [0, 1]$$

Reguła Hurwicza. Analizując kolejne wiersze macierzy znajdujemy minimalną i maksymalną korzyść, tj.: wartości a_i oraz A_i , a także wartość funkcji $H_i(\gamma)$ dla ustalonego γ . Wybieramy tę decyzję, dla której wartość funkcji $H_i(\gamma)$ jest największa. W przypadku niejednoznaczności rekomendujemy wszystkie decyzje, dla których powyższy warunek jest spełniony.

Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe			a min	A max	$H(\gamma)$ $\gamma = 0.5$
	susze	normalne	deszcze			
1	8	10	12	8	12	10
2	10	11	7	7	11	9
3	9	13	8	8	13	10.5 ← max
4	11	10	6	6	11	8.5
5	10	10	9	γ 9	10	9.5

Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności – gra z naturą



Gry w podejmowaniu decyzji

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

Macierz wypłat dla gracza A:

A \ B	B					
	B_1	B_2	...	B_m	...	B_M
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	...	a_{1M}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	...	a_{2M}
...	...	...	...	...	...	...
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}	...	a_{nM}
...	...	...	...	...	...	...
A_N	a_{N1}	a_{N2}	...	a_{Nm}	...	a_{NM}

Macierz wypłat dla gracza B:

A \ B	B					
	B_1	B_2	...	B_m	...	B_M
A_1	$-a_{11}$	$-a_{12}$	...	$-a_{1m}$	...	$-a_{1M}$
A_2	$-a_{21}$	$-a_{22}$	...	$-a_{2m}$	...	$-a_{2M}$
...	...	...	...	...	...	...
A_n	$-a_{n1}$	$-a_{n2}$	...	$-a_{nm}$	...	$-a_{nM}$
...	...	...	...	...	...	...
A_N	$-a_{N1}$	$-a_{N2}$	...	$-a_{Nm}$	...	$-a_{NM}$

Gracz A maksymalizuje zyski

Gracz B minimalizuje straty

Zwyczajowo podaje się macierz wypłat dla gracza A

Gry w podejmowaniu decyzji

∞ Typowe podejście do rozwiązywania gier

- Wyznaczenie punktu siodłowego
- Usunięcie strategii zdominowanych
- Wyznaczenie strategii mieszanej dla:
 - $N=2$ i $M=2$
 - $N>2$ i $M>2$

Gry w podejmowaniu decyzji

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

Punkt siodłowy: $\max_{1 \leq n \leq N} \min_{1 \leq m \leq M} a_{nm} = \min_{1 \leq n \leq N} \max_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

A \ B		B						min
		B_1	B_2	...	B_m	...	B_M	
	A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	...	a_{1M}	
	A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	...	a_{2M}	
	...	...	...	...	...	...	...	
	A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}	...	a_{nM}	
	...	...	...	...	...	...	...	
	A_N	a_{N1}	a_{N2}	...	a_{Nm}	...	a_{NM}	
max								

← $\max_{1 \leq n \leq N} \min_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

↑ $\min_{1 \leq n \leq N} \max_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

Gry w podejmowaniu decyzji

Strategia zdominowana i dominująca

Gracz A dysponuje strategiami: $A_1, A_2, \dots, A_N$

Strategia $A_{n'}$ jest zdominowana przez strategię $A_{n''}$
(dominującą)

jeżeli $\forall m = 1, 2, \dots, M \quad a_{n'm} \leq a_{n''m}$

Gracz B dysponuje strategiami: $B_1, B_2, \dots, B_M$

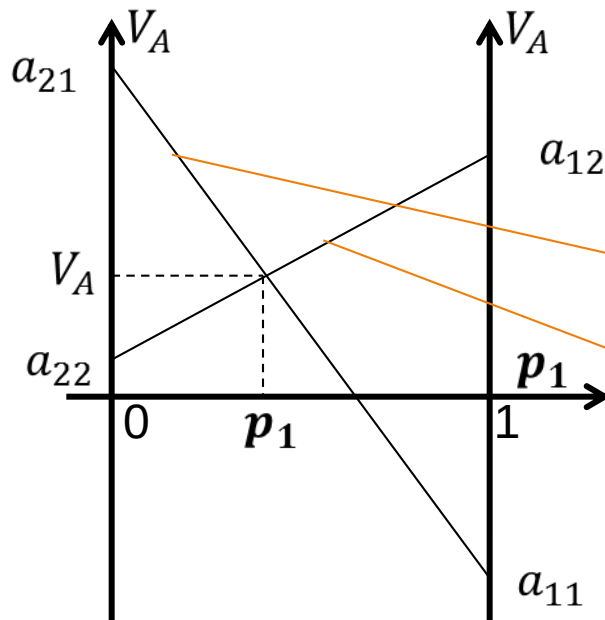
Strategia $B_{m'}$ jest zdominowana przez strategię $B_{m''}$
(dominującą)

jeżeli $\forall n = 1, 2, \dots, N \quad a_{nm'} \geq a_{nm''}$

Gry w podejmowaniu decyzji

$$N = M = 2$$

A B		q_1	q_2
		B_1	B_2
p_1	A_1	a_{11}	a_{12}
p_2	A_2	a_{21}	a_{22}



Równania dla gracza A

$$p_1 a_{11} + p_2 a_{21} = V_A / B_1$$

$$p_1 a_{12} + p_2 a_{22} = V_A / B_2$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_2 = 1 - p_1$$

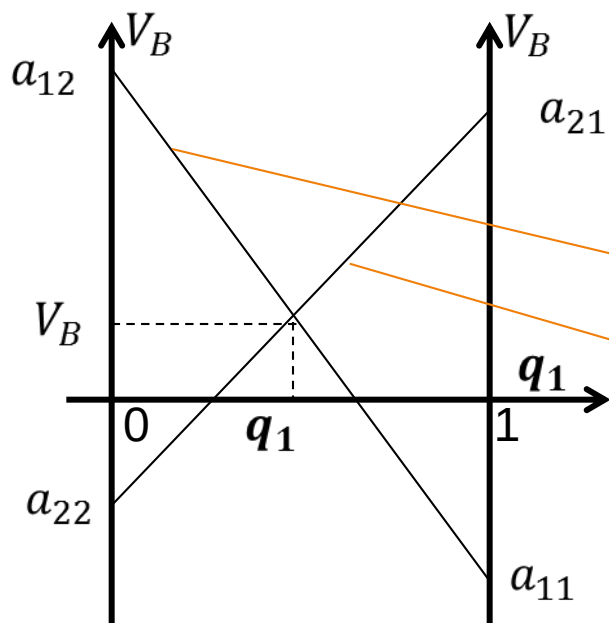
$$p_1 a_{11} + (1 - p_1) a_{21} = V_A / B_1$$

$$p_1 a_{12} + (1 - p_1) a_{22} = V_A / B_2$$

Gry w podejmowaniu decyzji

$$N = M = 2$$

A \ B		q_1	q_2
		B_1	B_2
p_1	A_1	a_{11}	a_{12}
p_2	A_2	a_{21}	a_{22}



Równania dla gracza B

$$q_1 a_{11} + q_2 a_{12} = V_B / A_1$$

$$q_1 a_{21} + q_2 a_{22} = V_B / A_2$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

$$q_2 = 1 - q_1$$

$$q_1 a_{11} + (1 - q_1) a_{12} = V_B / A_1$$

$$q_1 a_{21} + (1 - q_1) a_{22} = V_B / A_2$$

Gry w podejmowaniu decyzji

Zadanie dla gracza A

$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{Nm}x_N \geq 1 / B_m \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = \frac{1}{V_A} \quad \left| \begin{array}{l} \leftarrow \text{Zatem należy minimalizować wyrażenie} \\ \leftarrow \text{Gracz A maksymalizuje zysk} \end{array} \right.$$

$$x_n \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Ostatecznie zadanie dla gracza A

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N) = V_{A\min}$$

Przy ograniczeniach:

$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{Nm}x_N \geq 1 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$x_n \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$p_n = x_n V_{A\min}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Gry w podejmowaniu decyzji

Zadanie dla gracza B

$$a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nM}y_M \leq 1 / A_n \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_M = \frac{1}{V_B} \quad \leftarrow \text{Zatem należy maksymalizować wyrażenie}$$

$$y_m \geq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M \quad \text{Gracz B minimalizuje straty}$$

Ostatecznie zadanie dla gracza B

$$\max_{y_1, y_2, \dots, y_M} (y_1 + y_2 + \cdots + y_M) = V_{B\max}$$

Przy ograniczeniach:

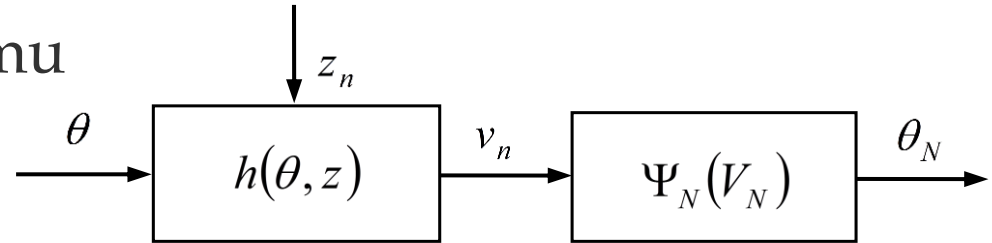
$$a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nM}y_M \leq 1 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$y_m \geq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$q_m = y_n V_{B\max}, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ Sformułowanie problemu



Opis systemu pomiarowego: $v = h(\theta, z)$

gdzie: $v \in \mathcal{V}$, h - znana funkcja, wzajemnie jednoznaczna względem z

$$h: \Theta \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{V}, \quad z = h_z^{-1}(\theta, v)$$

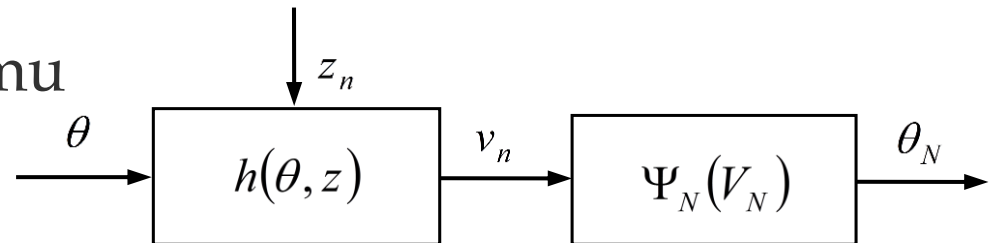
Przykłady funkcji h : $v = h(\theta, z) = \theta + z$

$$v = h(\theta, z) = \theta \cdot z$$

$\mathcal{V}$ - przestrzeń pomiarów($\dim \theta = \dim z = L$)

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ Sformułowanie problemu



Zakłócenia pomiarowe:

z_n – wartość zmiennej losowej $\underline{z}$ z przestrzeni $\mathcal{Z}$

$f_z(z)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $\underline{z}$

θ – obserwowany wektor wielkości, wartość zmiennej losowej $\underline{\theta}$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^R$

$f_\theta(\theta)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $\underline{\theta}$

Wyniki pomiarów: $V_N = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_N]$

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

Poszukujemy algorytmu estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(V_N)$$

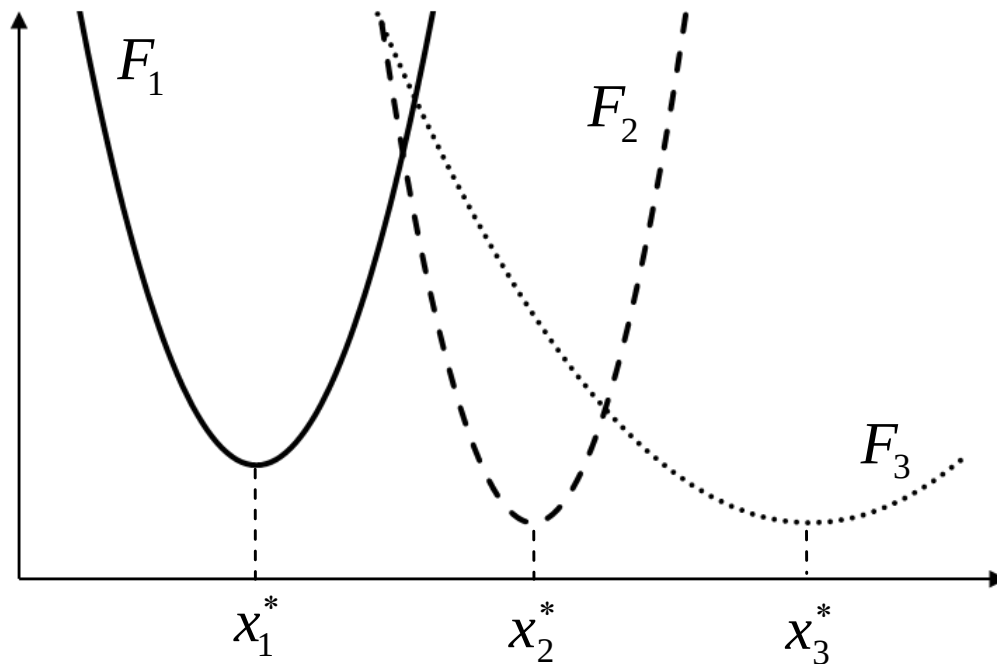
✂ Możliwe rozwiązania:

- Metoda najmniejszych kwadratów
- Metoda maksymalnej wiarygodności
- Metody Bayes'a

Zadanie polioptymalizacji

X – wektor zmiennych decyzyjnych

$F_1(x), F_2(x), \dots, F_M(x)$ – kilka różnych funkcji celu – ocena wielokryterialna



Poliptymalizacja

Syntetyczny wskaźnik jakości

$$F(x) = H(F_1(x), F_2(x), \dots, F_K(x)) \quad H(.) \text{ – funkcja monotoniczna ze względu na każdą składową}$$

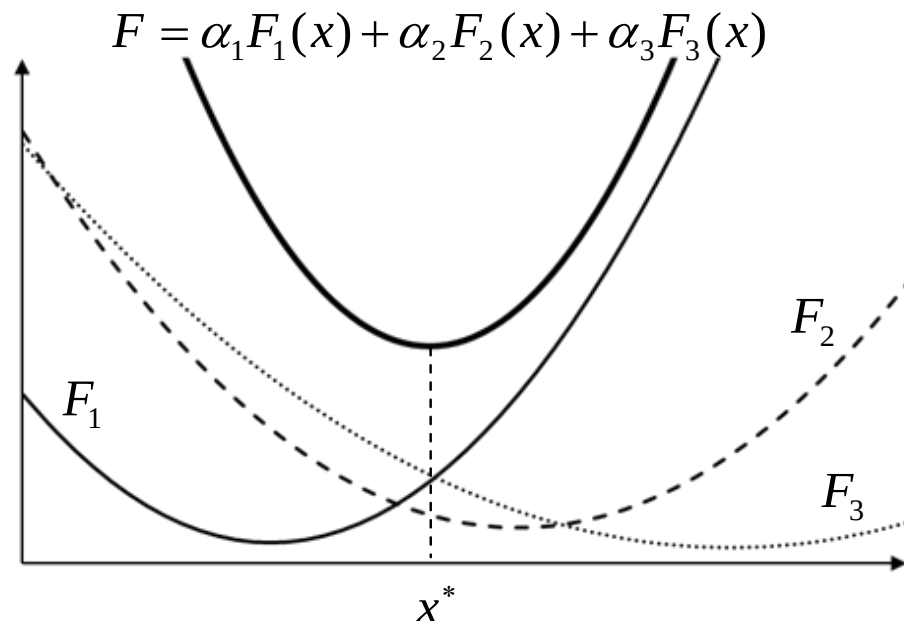
np.:
$$F(x) = \sum_{k=1}^K \alpha_k F_k(x)$$

gdzie:

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$F(x) = \prod_{k=1}^K F_k(x)$$

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$



Poliptymalizacja

Optymalizujemy wybrany wskaźnik,
Pozostałe wskaźniki spełnione są w sposób zadowalający.

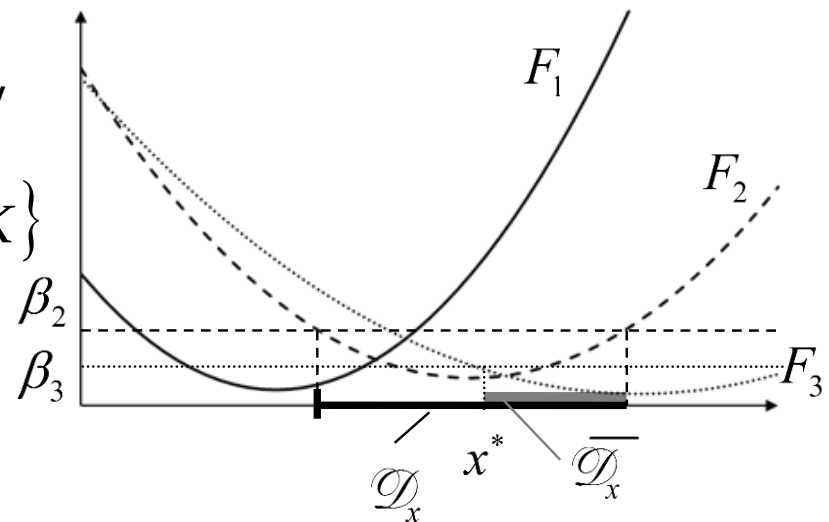
Niech $F_1(x)$ - wybrany wskaźnik

$$F_k(x) \leq \beta_k, \quad k = 2, 3, \dots, K$$

Wskaźniki spełnione w sposób zadowalający

$$\overline{\mathcal{D}}_x = \mathcal{D}_x \cap \{x \in \mathcal{R}^S : F_k(x) \leq \beta_k, k = 2, \dots, K\}$$

$$x^* \rightarrow F_1(x^*) = \min_{x \in \overline{\mathcal{D}}_x} F_1(x)$$



Poliptymalizacja

Uszeregowane wskaźniki jakości – priorytety wśród wskaźników

$$F_1(x) \succ F_2(x) \succ \dots \succ F_K(x) \quad x \in \mathcal{D}_x$$

Krok 1. $\mathcal{D}_{x1} = \mathcal{D}_x$

$$x_1^* \rightarrow F_1(x_1^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_{x1}} F_1(x)$$

Krok 2. $\mathcal{D}_{x2} = \mathcal{D}_{x1} \cap \left\{ x \in \mathcal{R}^S : F_1(x) \leq F_1(x_1^*) + \gamma_1 \right\}$

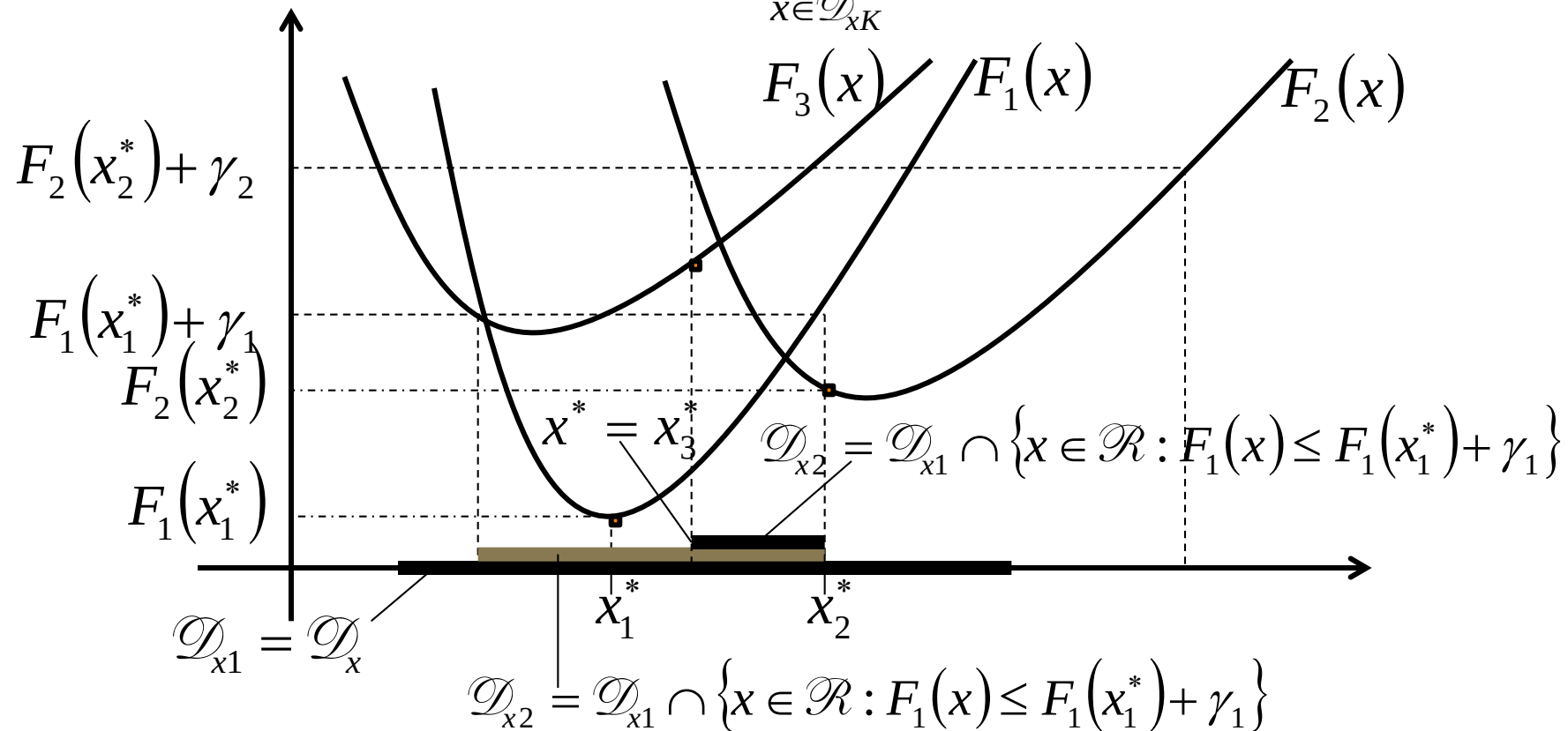
$$x_2^* \rightarrow F_2(x_2^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_{x2}} F_2(x)$$

⋮

Poliptymalizacja

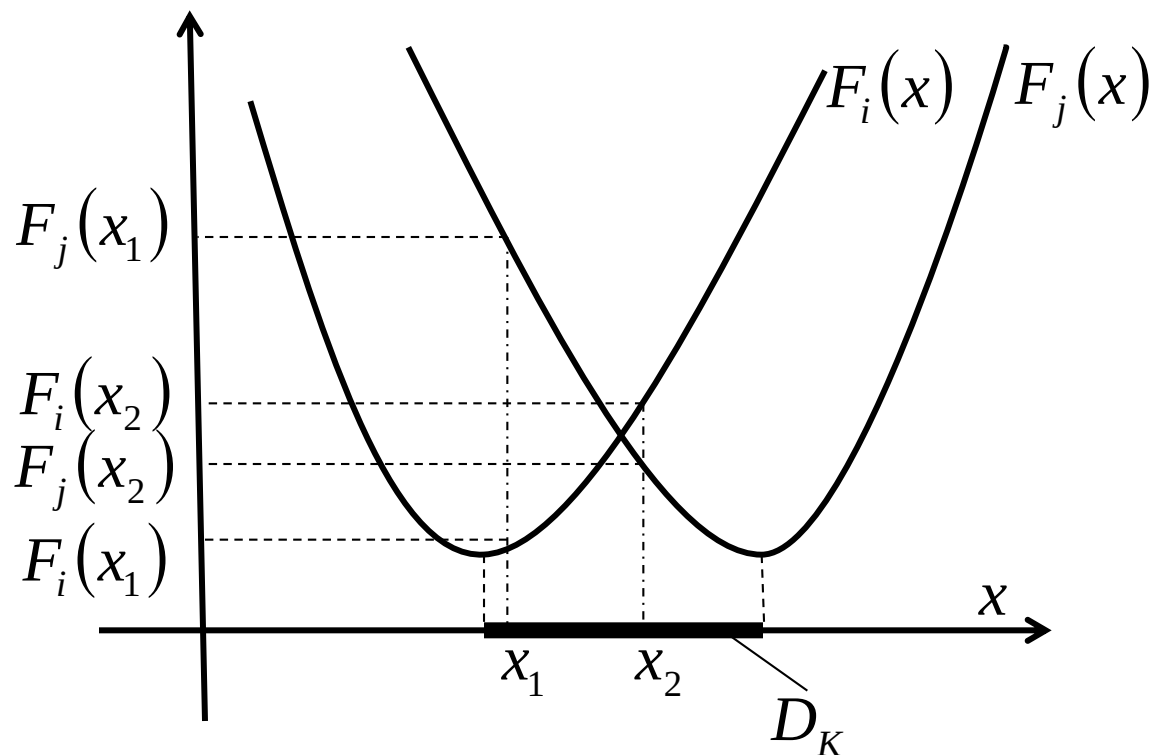
Krok K. $\mathcal{D}_{xK} = \mathcal{D}_{xK-1} \cap \{x \in \mathcal{R}^s : F_{K-1}(x) \leq F_1(x_K^*) + \gamma_{K-1}\}$

$$x^* = x_K^* \rightarrow F_K(x_K^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_{xK}} F_K(x)$$



Zbiór punktów kompromisowych

$$x_1, x_2 \in D_K \Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, K\} \exists i \in \{1, 2, \dots, K\} \\ F_j(x_1) > F_j(x_2) \Rightarrow F_i(x_1) < F_i(x_2)$$



Optymalizacja wieloetapowa

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_S^* \rightarrow F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_S^*) = \min_{x_1, x_2, \dots, x_S \in \mathcal{D}_x} F(x_1, x_2, \dots, x_S)$$

$$\mathcal{D}_x = (x_1, x_2, \dots, x_S)$$

$$\left\{ \begin{aligned} [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_S]^T \in \mathcal{R}^S : \varphi_l(x_1, x_2, \dots, x_S) = 0, l = 1, 2, \dots, L, \\ \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_S) \leq 0, m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \right\}$$

Powyższe zadanie można rozwiązać krok po kroku optymalizując po jednej zmiennej i uzależniając od pozostałych.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$F \equiv F_S, \quad \varphi_l \equiv \varphi_{lS}, l = 1, 2, \dots, L, \quad \psi_m = \psi_{mS}, m = 1, 2, \dots, M \quad \mathcal{D}_x \equiv \mathcal{D}_{x_S}$$

Optymalizacja wieloetapowa

Krok 1.

$$x_S^* = G_S(x_1, \dots, x_{S-1}) \rightarrow F_S(x_1, x_2, \dots, x_S^*) = \min_{x_S \in \mathcal{D}_{xS}} F_S(x_1, x_2, \dots, x_S)$$

Wartość funkcji celu w punkcie optymalnym:

$$F_{S-1}(x_1, x_2, \dots, x_{S-1}) \stackrel{\Delta}{=} F_S(x_1, x_2, \dots, x_S^*) = F_S(x_1, x_2, \dots, G_S(x_1, \dots, x_{S-1}))$$

Ograniczenia w punkcie optymalnym:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{xS-1}(x_1, \dots, x_{S-1}) &\stackrel{\Delta}{=} \mathcal{D}_{xS}(x_1, \dots, x_{S-1}, x_S^* = G_S(x_1, \dots, x_{S-1})) = \\ &\left\{ \begin{aligned} &[x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{S-1}]^T \in \mathcal{R}^{S-1} : \\ &\varphi_{lS}(x_1, x_2, \dots, G_S(x_1, \dots, x_{S-1})) = \varphi_{lS-1}(x_1, x_2, \dots, x_{S-1}) = 0, \ l = 1, 2, \dots, L, \\ &\psi_{mS}(x_1, x_2, \dots, G_S(x_1, \dots, x_{S-1})) = \psi_{mS-1}(x_1, x_2, \dots, x_{S-1}) \leq 0, \ m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Optymalizacja wieloetapowa

⋮

Krok S-1.

$$x_2^* = G_2(x_1) \rightarrow F_2(x_1, x_2^*) = \min_{x_2 \in \mathcal{D}_{x_2}} F_2(x_1, x_2)$$

Wartość funkcji celu w punkcie optymalnym:

$$F_1(x_1) \stackrel{\Delta}{=} F_2(x_1, x_2^*) = F_2(x_1, G_2(x_1))$$

Ograniczenia w punkcie optymalnym:

$$\mathcal{D}_{x_1}(x_1) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{D}_{x_{S-1}}(x_1, x_2^* = G_1(x_1)) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in \mathcal{R} : \\ \varphi_{l2}(x_1, G_1(x_1)) = \varphi_{l1}(x_1) = 0, l = 1, 2, \dots, L, \\ \psi_{m2}(x_1, G_{S-1}(x_1)) = \psi_{m1}(x_1) \leq 0, m = 1, 2, \dots, M \end{array} \right\}$$

Optymalizacja wieloetapowa

Krok S.

$$x_1^* \rightarrow F_1(x_1^*) = \min_{x_1 \in \mathcal{D}_{x_1}} F_1(x_1)$$

Teraz możemy powrócić do zależności „G” wyznaczonych w poprzednich krokach

$$x_1^*$$

$$x_2^* = G_2(x_1^*)$$

$$\vdots$$

$$x_{S-1}^* = G_{S-1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{S-1}^*)$$

$$x_S^* = G_S(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{S-1}^*)$$

Dekompozycja i koordynacja zadania optymalizacji

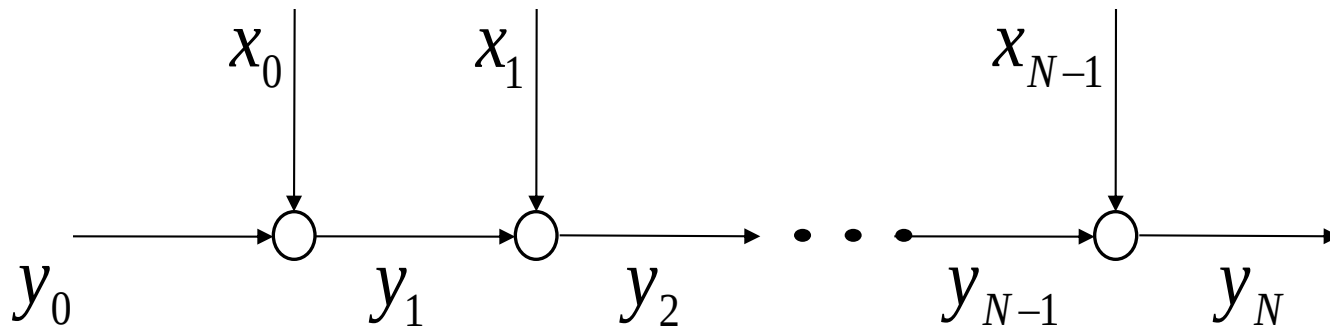
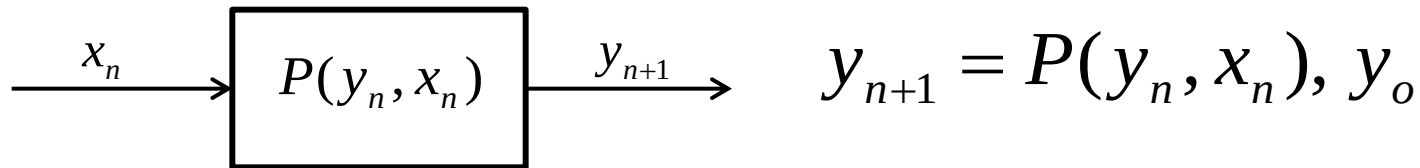
$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x) \quad F(x) = H\left(F_I(x^I, w), F_{II}(x^{II}, w), \dots, F_K(x^K, w)\right)$$

$$x \in \mathcal{D}_x \subset \mathcal{R}^S, \mathcal{D}_x = \left\{x \in \mathcal{R}^S; \varphi(x) = 0_L, \psi(x) \leq 0_M\right\}$$

$$\mathcal{D}_x = \left\{x = \begin{bmatrix} x^I \\ x^{II} \\ \vdots \\ x^K \\ w \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^S, \varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi^I(x^I, w) \\ \varphi^{II}(x^{II}, w) \\ \vdots \\ \varphi^K(x^K, w) \\ \varphi^w(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{L_I} \\ 0_{L_{II}} \\ \vdots \\ 0_{L_K} \\ 0_{L_w} \end{bmatrix} = 0_L, \psi(x) = \begin{bmatrix} \psi^I(x^I, w) \\ \psi^{II}(x^{II}, w) \\ \vdots \\ \psi^K(x^K, w) \\ \psi^w(w) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0_{M_I} \\ 0_{M_{II}} \\ \vdots \\ 0_{M_K} \\ 0_{M_w} \end{bmatrix} = 0_M\right\}$$

$$\sum_{k=I}^K L_k + L_w = L, \sum_{k=I}^K M_k + M_w = M$$

Programowanie dynamiczne



$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1}) \stackrel{\Delta}{=} F(y_0, x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$$

Programowanie dynamiczne

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1})$$

Krok 1. $x_{N-1}^* \rightarrow \min_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, y_N) = \min_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, P(y_{N-1}, x_{N-1}))$

Wiemy że: $y_N = P(y_{N-1}, x_{N-1})$

$$x_{N-1}^* = G_{N-1}(y_{N-1}) \rightarrow \min_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, P(y_{N-1}, x_{N-1}))$$

$$V_{N-1}(y_{N-1}) \stackrel{\Delta}{=} \min_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, P(y_{N-1}, x_{N-1})) =$$

$$= A_N(x_{N-1}^*, P(y_{N-1}, x_{N-1}^*)) = A_N(G_{N-1}(y_{N-1}), P(y_{N-1}, G_{N-1}(y_{N-1})))$$

Programowanie dynamiczne

Krok N.

$$x_0^* \rightarrow \min_{x_0} \{A_1(x_0, y_1) + V_1(y_1)\}$$

Wiemy że:

$$y_1 = P(y_0, x_0)$$

$$x_0^* = G_0(y_0) \rightarrow \min_{x_0} \{A_1(x_0, P(y_0, x_0)) + V_1(P(y_0, x_0))\}$$

y_0 jest znaną wartością i teraz możemy wyliczyć kolejne wartości decyzji $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^*$,

$$x_0^* = G_0(y_0) \rightarrow y_1 = P(y_0, x_0^*)$$

$$x_1^* = G_1(y_1) \rightarrow y_2 = P(y_1, x_1^*)$$

$\vdots$

$$x_{N-2}^* = G_{N-2}(y_{N-2}) \rightarrow y_{N-1} = P(y_{N-2}, x_{N-2}^*)$$

$$x_{N-1}^* = G_{N-1}(y_{N-1}) \rightarrow y_N = P(y_{N-1}, x_{N-1}^*)$$

Dekompozycja i koordynacja zadania optymalizacji

Zadanie rozwiązujemy w dwóch etapach.

Etap I: Dla ustalonej zmiennej koordynacyjnej w rozwiązujemy K zadań

$$x^{k*}(w) \rightarrow F_k(x^{k*}(w), w) = \min_{x^k \in \mathcal{D}_{x^k}(w)} F_k(x^k, w), \quad k = 1, 2, \dots, K$$

Następnie wyznaczamy wartość:

$$\bar{F}(w) \stackrel{\Delta}{=} H(F_I(x^{I*}(w), w), F_{II}(x^{II*}(w), w), \dots, F_K(x^{K*}(w), w))$$

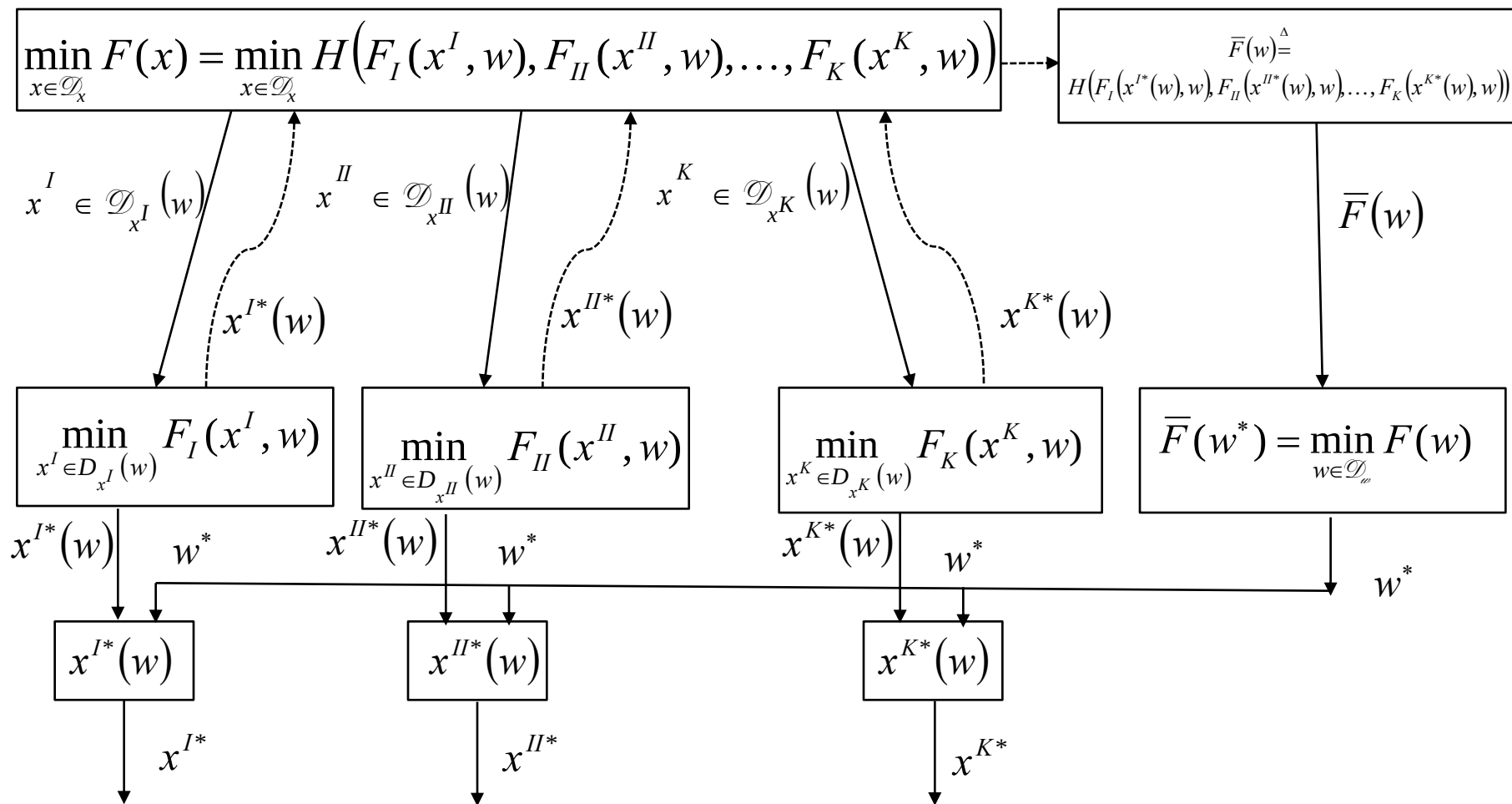
Etap II: wyznaczamy optymalną wartość zmiennej koordynacyjnej rozwiązując zadanie:

$$w^* \rightarrow \bar{F}(w^*) = \min_{w \in \mathcal{D}_w} F(w)$$

ostatecznie

$$x^{k*} = x^{k*}(w^*), \quad k = 1, 2, \dots, K$$

Dekompozycja i koordynacja zadania optymalizacji



Egzamin

☞ Metody systemowe i decyzyjne

☞ Termin 0 – ostatni wykład:

☞ 24.06.2026 (środa) sala 41, bud. C-4, godzina 7³⁰-9⁰⁰

☞ Termin 1:

☞ 1.07.2026 (środa) sala 41, bud. C-4, godzina 7³⁰-9⁰⁰

☞ Termin 2:

☞ 8.07.2026 (środa) sala 41, bud. C-4, godzina 7³⁰-9⁰⁰

Termin „zero” - zasady

- o Pozytywne aktualne (tegoroczne) zaliczenie form pomocniczych ≥ 3.0
- o Propozycja oceny – wartość średnia z części całkowitej sumy ocen form pomocniczych

$$\text{tj.: propozycja oceny} = \frac{[\text{ćwiczenia} + \text{laboratoria}]}{2} \geq 3.5$$

- o Obecność na ostatnim wykładzie
- o Nieobecni (bez względu na przyczynę) rezygnują ze zwolnienia
- o Można wcześniej ale nie po terminie 0. Należy przedstawić potwierdzoną ocenę.

Osoby, które mają zaliczenie form pomocniczych z ubiegłych lat proszę o przedstawienie udokumentowanej oceny przed terminem „zero”

Dziękuję za uwagę

